Handout

Mata Kuliah: Aljabar Matriks (2 SKS)

Dosen: Dra. Hj Ade Rohayati, M. Pd.

No.	Indikator	Uraian Materi
1	1.1 menyebutkan definisi matriks. 1. 2 membuat beberapa contoh matriks dengan menggunakan notasi yang tepat. 1. 3 menentukan ordo dari suatu matriks yang diberikan. 1. 4 menuliskan bentuk umum dari matriks yang berordo m x n. 1. 5 menentukan letak suatu unsur dari suatu matriks yang diberikan.	**Matriks** **Definisi**. **Matriks** adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat yang diatur dalam baris dan kolom Bilangan-bllangan dalam susunan itu disebut anggota/elemen/unsure dari matriks tersebut. **Cara memberi nama suatu matriks dan unsur-unsurnya.** Suatu matriks diberi nama dengan menggunakan huruf kapital seperti A, B, C, dan sterusnya, sedangkan anggotanya dinyatakan dengan huruf kecil. Anggota dari suatu matriks dapat pula dinyatakan dengan huruf kecil yang berindeks ganda (a_{ij}) , dengan indeks pertama menyatakan di baris mana unsur itu terletak dan indeks kedua menyatakan di kolom mana unsur itu terletak. Sebagai contoh a_{12} artinya unsur tersebut terletak pada baris kesatu dan kolom kedua. Begitu juga a_{23} artinya unsur tersebut terletak pada baris kedua dan kolom ketiga. **Cara menyatakan matriks** Notasi yang digunakan untuk menyatakan matriks bisa dengan kurung kecil : ( ), kurung siku : [ ]}, atau dengan garis tegak dobel : $\Vert \quad \Vert$. Contoh: A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ $atau\ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ $atau\ A = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Vmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ **Odo/Ukuran/Order dari suatu matriks** Ordo/ukuran dari suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom yang dimiliki oleh matriks tersebut. Contoh: Matriks A pada contoh di atas meniliki **dua buah baris** dan **tiga buah kolom**, sehingga kita katakana matriks A berordo 2 $\times$ 3 dan ditulis $A_{2\times3}$. Begitu juga matriks B meniliki **dua buah baris** dan **dua buah kolom**,

		sehingga kita katakana matriks B berordo 2 $\times$ 2 dan ditulis $B_{2\times 2}$. **Bentuk umum suatu matriks** Secara umum suatu matriks dituliskan dengan $A_{m\times n}$ dengan m menyatakan banyaknya baris dan n menyatakan banyaknya kolom. Dengan demikian m = 1, 2, 3, ..., m dan n = 1, 2, 3, ..., n, sehingga bentuk umumnya: A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
2	2. 1 merumuskan definisi jenis matriks tertentu melalui pengamatan terhadap matriks-matriks yang diberikan. 2. 2 membedakan jenis-jenis matriks. 2. 3 membuat kaitan antara matriks diagonal, matriks skalar, dan matriks satuan. 2. 4 membuat minimal sebuah contoh untuk masing-masing jenis	**Macam-macam Matriks** **Matriks persegipanjang**: matriks yang memiliki banyak baris tidak sama dengan banyaknya kolom. Contoh : A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -7 \end{bmatrix}$ **Matriks persegi:** matriks yang memiliki banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Contoh: B = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ **Matriks nol**: matriks yang semua unsurnya nol. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Matriks baris/ vektor baris: matriks yang hanya terdiri dari satu baris. C = $\begin{bmatrix} \text{[redacted]} & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

	matriks.	Matriks kolom/ vektor klom: matriks yang hanya terdiri dari satu kolom. Contoh : K = $\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ **Matriks diagonal**: matriks persegi yang unsur-unsur selain unsur diagonal utamanya adalah nol. Contoh : D = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ = Diag (0, -1, 3) **Matriks skalar**: matriks diagonal yang semua unsur diagonal utamanya adalah skalar k yang sama. Contoh : A = $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **Matriks satuan/Matriks Identitas:** matriks skalar yang semua unsur diagonal utamanya 1. Contoh : I_3 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, I_2 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **Matriks segitiga atas**: matriks persegi yang semua unsur di bawah diagonal utamanya nol. Atau dapat dikatakana suatu matriks persegi A = [a_{ij}] adalah segitiga atas jika dan hanya jika a_{ij} = 0 untuk i > j. Contoh : C = $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **Matriks segitiga bawah**: matriks persegi yang semua unsur di atas diagonal utamanya nol. Atau dapat dikatakana

		suatu matriks persegi $A = [a_{ij}]$ adalah segitiga bawah jika dan hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$. Contoh : $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ **Matriks simetri**: matriks persegi yang semua unsur a_{ij} = unsur a_{ji} untuk setiap i dan j. Contoh : $S = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **Matrix anti symmetry/simetri miring (skew symetry)**: matriks persegi yang semua $a_{ij} = - a_{ji}$ untuk setiap i dan j. Contoh : $K = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ **Dst.**

2	3. 1 menentukan syarat penjumlahan dua buah matriks agar terdefinisi. 3. 2 menentukan syarat pengurangan dua buah matriks agar terdefinisi. 3. 3 menentukan syarat perkalian matriks dengan matriks agar terdefinisi. 3. 4 menjumlahkan dua buah matriks 3. 5 melakukan operasi pengurangan matriks. 3. 6 mengalikan skalar dengan matriks. 3. 7 mengalikan matriks dengan matriks 3. 8 mencari unsur-	**Definisi**. Jika A dan B adalah **matriks-matriks yang berukuran sama**, maka jumlah **A + B** adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota B dengan anggota-anggota A yang berpadanan, dan selisih **A – B** adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B yang berpadanan. Matriks-matriks **berukuran berbeda** tidak bisa ditambahkan atau dikurangkan. Contoh: A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -7 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & -5 & -6 \end{bmatrix}$, maka A + B = $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 9 & -10 & -13 \end{bmatrix}$ dan A – B = A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **Definisi**. Jika A adalah sembarang matriks dan k adalah sembarang skalar, maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A dengan k. Contoh: A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ dan k = 3, maka kA = $\begin{bmatrix} 3 & 15 & 6 \\ -9 & 6 & 12 \\ 12 & 12 & -3 \end{bmatrix}$ **Definisi**. Jika A adalah sebuah matriks m $\times r \text{ dan } B \text{ adalah sebuah matriks } r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks m $\times$ n yang unsur-unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j nya diperoleh dengan menjumlahkan hasil kali unsur-unsur yang berpadanan dari baris ke- dan kolom ke-j. Contoh: A = = $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, maka AB = $\begin{bmatrix} 2+4+8 & 0+20+12 & -6+8-10 & 4-12+6 \\ -5+6+28 & 0+30+42 & 15+12-35 & -10-18+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 32 & -8 & -2 \\ 29 & 72 & -8 & -7 \end{bmatrix}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>unsur a_{ij} dari suatu hasil kali matriks dengan matriks untuk i dan j tertentu tanpa mencari hasil kali secara keseluruhan.
3. 9 menentukan transpos dari suatu matriks.
3. 10 menentukan trace dari suatu matriks.
3. 11 membuktikan teorema-teorema operasi hitung matriks.</td>
<td>

Mencari unsur-unsur yang terletak pada baris atau kolom tertentu dari hasil kali dua buah matriks

Contoh: jika B = $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix}$,

a) Carilah unsur-unsur **baris kesatu** dari hasil kali matriks B dan C,

b) Carilah unsur-unsur **kolom kedua** dari hasil kali matriks B dan C,

Jawab:

a) Unsur-unsur **baris kesatu** dari hasil kali BC didapatkan dengan cara mengalikan

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -16 & 16 \end{bmatrix}$$

b) Unsur-unsur **kolom kedua** dari hasil kali BC didapatkan dengan cara mengalikan

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -3 \\ -28 \end{bmatrix}$$

Transpos dari suatu Matriks

Definisi. Jika A adalah matriks yang berordo m $\times$ n, maka transpose A, dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks n $\times$ m yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dan kolom dari A; yaitu kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.

</td>
</tr>
</table>

Contoh :

Jika $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\quad D = [7]$, maka

$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad C^T = \begin{bmatrix} & 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad D^T = [7]$

Trace dari suatu Matriks

Definisi. Jika A adalah suatu matriks persegi, maka **trace A**, dinyatakan dengan tr(A), didefinisikan sebagai jumlah anggota-anggota pada diagonal utama A.

Contoh: Berikut adalah contoh-contoh matriks dan trace-nya.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & \\ 5 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ $\qquad tr(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 12$

Teorema-teorema Operasi Hitung Matriks.

Teorema 1. Dengan menganggap bahwa ukuran matriks-matriks di bawah ini adalah sedemikian hingga operasi yang ditunjukkan bisa dilakukan, maka aturan-aturan aritmetika berikut ini adalah sahih.

(a) A + B = B + A (hukum komutatif untuk penjumlahan)

(b) A + (B + C) = (A + B) + C (hukum asosiatif untuk penjumlahan)

(c) A(BC) = (AB)C (hokum asosiatif untuk penjumlahan)

(d) $A(B + C) = AB + AC$ (hukum distributif kiri)

(e) $(B + C)A = BA + CA$ (hukum distributif kanan)

(f) $A(B - C) = AB - AC$

(g) $(B - C)A = BA - CA$

(h) $a(B + C) = aB + aC$

(i) $a(B - C) = aB - aC$

(j) $(a + b) C = aC + bC$

(k) $(a - b) C = aC - bC$

(l) $A(bC) = (ab)C$

(m) $A(BC) = (aB)C = B(aC)$

Teorema 2. Dengan menganggap ukuran matriks adalah sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan bisa dilakukan, aturan-aturan aritmetika matriks berikut ini adalah sahih.

(a) $A + O = O + A = A$

(b) $A - A = O$

(c) $O - A = -A$

(d) $AO = O; OA = O$

Teorema 3. Jika R adalah sebuah matriks $n \times n$ dari matriks A berbentuk eselon-baris tereduksi, maka R mempunyai sebuah baris nol atau R merupakan matriks identitas I_n.

Teorema 4. Jika B dan C keduanya adalah invers dari matriks A, maka B = C

Teorema 5. Jika A dan B adalah matriks-matriks yang invertible dan berukuran sama, maka :

(a) AB invertible

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

	4.1 membuat contoh persamaan linear. 4. 2 membedakan antara contoh dan bukan contoh persamaan linear dari contoh-contoh persamaan yang diberikan. 4. 3 menyebutkan definisi sistem persamaan linear. 5. 1 membedakan antara matriks yang berbentuk eselon baris dan eselon baris tereduksi 5. 2 mereduksi suatu matrik yang diperbesar dari suatu SPL menjadi bentuk eselon baris. 5. 3 mereduksi suatu matriks yang diperbesar dari suatu SPL	**Persamaan Linear** Persamaan linear adalah persamaan yang pangkat tertinggi dari peubah/variabelnya adalah satu. Suatu persamaan linear dalam 2 peubah x, y dapat ditulis $a_1x + a_2y = b$ Suatu persamaan linear dalam n peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dapat disajikan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b konstanta real. **Beberapa contoh persamaan linear** $x + 3y = 7$ $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$ $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ **Beberapa contoh yang bukan persamaan linear** $x + 3y^2 = 7$ $y - \sin x = 0$ $3x + 2y - z + xz = 4$ $\sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$ **Sistem Persamaan Linear** **Definisi.** Sebuah himpunan terhingga persamaan linear dalam peubah-peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut sebuah **sistem persamaan linear** atau sebuah **sistem linear**. Sederet angka $s_1, s_2, \ldots, s_n$ disebut suatu **penyelesaian** sistem tersebut jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. merupakan penyelesaian dari setiap persamaan dalam sistem

	menjadi bentuk eselon baris tereduksi. 5. 4 menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dengan eliminasi Gauss. 5. 5 menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dengan eliminasi Gauss-Jordan. 5. 6 Membuat minimal sebuah contoh SPL tak konsisten yang mempunyai peubah yang lebih banyak daripada persamaannya. 6. 1 menuliskan bentuk umum SPL homogen yang terdiri dari m persamaan dengan n variabel. 6. 2 membuat	tersebut. **Bentuk umum sistem persamaan linear dengan m persamaan dan n variabel** x_1, x_2, …, x_n: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ $a_{211}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$ $\vdots \qquad \vdots$ $a_{m11}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = bm$ Contoh sistem persamaan linear dengan 2 persamaan dan 3 variabel : $4x_1 – x_2 + 3x_3 = -1$ $3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$ Sistem tersebut mempunyai penyelesaian $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, karena nilai-nilai ini memenuhi kedua persamaan di atas. Akan tetapi, $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$ bukanlah penyelesaian karena nilai-nilai ini hanya memenuhi persamaan pertama dari sistem. **Jenis penyelesaian dari sistem persamaan linear SPL)** Suatu SPL mungkin memiliki tepat satu penyelesaian, tidak memiliki penyelesaian , atau memiliki banyak (tak hingga) penyelesaian. SPL yang tidak memiliki penyelesaian disebut **inconsistent.** Contoh SPL yang memiliki tepat satu penyelesaian: $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$

	contoh SPL homogen yang memiliki penyelesaian trivial. 6. 3 membuat contoh SPL homogen yang memiliki penyelesaian tak trivial. 6. 4 meyelesaikan SPL homogen. 6. 5 membedakan SPL homogen yang mempunyai penyelesaian trivial dan non trivial. 6. 6 menentukan gambaran geometris dari suatu SPL homogeny yang memiliki penyelesaian trivial.. 6. 7 menentukan gambaran geometris dari suatu SPL homogen yang	Contoh SPL yang tidak memiliki penyelesaian: $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 164x_4 &= 5 \end{aligned}$ Contoh SPL yang memiliki banyak penyelesaian: $5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$ $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$ Untuk mencari penyelesaian dari sistem persamaan linear, dapat digunakan pereduksian terhadap augmented matrix (matriks yang diperbesar) dengan menerapkan tiga jenis operasi baris elementer (OBE), yaitu: 1. Kalikan sebuah baris dengan sebuah konstanta tak-nol. 2. Pertukarkan dua baris 3. Tambahkan perkalian dari suatu baris ke baris lainnya. **Eliminasi Gaussian** Untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dapat digunakan eliminasi Gaussia, yaitu pereduksian terhadap augmented matrix sampai bentuk **eselon baris** atau **eselon baris tereduksi**. Jika pereduksian dilakukan sampai diperoleh bentuk eselon baris, maka disebut **eliminasi Gauss** dan jika dilakukan hingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi maka disebut **eliminasi Gauss-Jordan**. Contoh : Selesaikan SPL: $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$ Untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut pertama-tama kita harus menuliskan augmented matrix-

<table>
<tr>
<td></td>
<td>memiliki penyelesaian taktrivial.</td>
<td>

nya terlebih dahulu, yaitu: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$. Selanjutnya reduksilah dengan menggunakan OBE hingga

didapatkan matriks dalam bentuk eselon baris $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ .... (1)

atau matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ .... (2)

Sifat-sifat matriks yang berbentuk eselon baris tereduksi

1. Jika suatu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka angka tak-nol pertama dalam baris tersebut adalah angka 1. (Kita sebut 1 utama).
2. Jika ada sembarang baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini dikelompokkan bersama di bagian bawah matriks.
3. Jika dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, 1 utama dalam baris yang lebih bawah terletak di sebelah kanan 1 utama dalam baris yang lebih atas.
4. Masing-masing kolom yang berisi sebuah 1 utama mempunyai nol di tempat lainnya.

Suatu matriks yang memiliki sifat **1, 2, dan 3** (tetapi tidak perlu 4) disebut mempunyai **bentuk eselon baris**.

Sistem persamaan yang berkoresponden dengan bentuk (1) adalah:

$x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 9$

</td>
</tr>
</table>

		$x_2 + \frac{7}{2}x_3 = -\frac{17}{2}$ $x_3 = 3$ Sistem persamaan yang berkoresponden dengan bentuk (2) adalah: $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = 3$ Dari contoh di atas, terlihat bahwa: Jika kita bekerja sampai didapatkan matriks yang berbentuk **eselon baris tereduksi**, maka kita langsung mendapatkan **harga untuk variabel utamanya**, yaitu $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 3$ Jika kita bekerja sampai didapatkan matriks yang **berbentuk eselon baris**, maka kita harus melakukan **substitusi balik**, dengan langkah-langkah sebagai berikut: 1. Selesaikan persamaan untuk peubah-peubah utama 2. Mulai dari persamaan yang paling bawah dan lanjutkan ke atas, secara berturut-urut substitusikan masing-masing persamaan ke semua persamaan di atasnya. **SPL Homogen** Bentuk umum SPL homogen dengan m persamaan dan n variabel adalah: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$ $a_{211}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$ $\vdots \qquad \vdots$ $a_{m11}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$

		Jenis Penyelesaian SPL Homogen Ada dua kemungkinan jenis penyelesaian SPL homogen , yaitu penyelesaian **trivial** dan penyelesaian **non-trivial**. Tak ada satu pun SPL homogen yang inconsistent, karena minimal memiliki penyelesaian trivial. Contoh SPL homogen yang mempunyai **penyelesaian trivial**: $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$ $x_1 + 2x_2 = 0$ $x_2 + x_3 = 0$ Contoh SPL homogen yang mempunyai **penyelesaian non-trivial**: $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ $5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ **Menyelesaikan SPL Homogen** Untuk menyelesaikan SPL homogen caranya serupa dengan cara untuk menyelesaikan SPL, yaitu dengan menggunakan **eliminasi Gauss-Jordan**. Gambaran geometris dari suatu SPL homogen, yang memiliki penyelesaian trivial, berupa garis-garis yang berpotongan di titik pangkal. Sedangkan gambaran geometris dari suatu SPL homogen, yang memiliki penyelesaian non-trivial, berupa garis-garis yang berimpit dan berpotongan di titik pangkal.
5	7. 1 menyebutkan definisi matriks elementer. 7. 2 membuat contoh matriks elementer. 7. 3 membedakan	**Matriks Elementer** **Definisi.** Suatu matriks n × n disebut matriks elementer (dasar) jika matriks ini bisa diperoleh dari suatu matriks identitas n × n, I_n dengan melakukan suatu operasi baris tunggal. **Beberapa contoh matriks elementer**:

matrks elementer dan bukan matriks elementer.

7. 3 menentukan operasi baris yang akan mengembalikan matriks elementer yang diberikan pada matriks satuan.

8. 1 menentukan invers suatu matriks dengan OBE.

8. 2 menentukan singularitas suatu matriks.

8. 3 membuktikan teorema-teorema invers matriks.

8. 4 menggunakan invers matriks untuk menyelesaikan SPL

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris kedua I_2 dengan -7	Pertukarkan baris Kedua dan keempat Dari I_4	Kalikan baris Pertama dari I_3 dengan 1	Tambahkan 2 kali baris ketiga dari I_3 pada baris pertama

Beberapa contoh bukan matriks elementer

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika kita membuat matriks elementer dari matriks satuan dengan OBE tertentu, maka kita bias melakukan operasi balikannya untuk menghasilkan kembali matriks satuan dari matriks elementer. Operasi-operasi tersebut dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1

Operasi baris pada I yang menghasilkan E	Operasi baris pada E yang menghasilkan I lagi
Kalikan baris i dengan c $\neq$ 0	Kalikan baris i dengan 1/c
Pertukarkan baris i dan j	Pertukarkan baris i dan j

Tambahkan c kali baris i ke baris j	Tambahkan -c kali baris i ke baris j

Beberapa Teorema yang Berkaitan dengan Matriks Elementer

Teotema 1. Jika matriks elementer E dihasilkan dari suatu operasi baris tertentu terhadap I_n dan jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka hasil kali EA adalah matriks yang dihasilkan jika operasi baris yang sama dikenakan pada A.

Teorema 2. Setiap matriks elementer invertible, dan inversnya juga merupakan suatu matriks elementer.

Teorema 3. Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka pernyatan-pernyataan berikut ini ekuivalen, yaitu semua benar atau semua salah.

(a) A invertible
(b) Ax = O hanya mempunyai penyelesaian trivial
(c) Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n
(d) A dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks-matriks elementer.

Dari teorema 3 di atas (a) dan (c) dapat dikatakan bahwa suatu matriks yang memiliki invers, determinannya $\neq$ 0 dan disebut **singular**.

Untuk mendapatkan **invers dari suatu matriks A** yang inverible, kita harus menemukan serangkaian OBE yang mereduksi A menjadi **matriks Identitas** dan kemudian melakukan serangkaian operasi yang sama pada $\mathbf{I_n}$ untuk memperoleh invers **A**.

		Sistem Persamaan Linear dan Keterbalikan **Teorema 1.** Setiap system persamaan linear bias tidak mempunyai penyelesaian, tepat satu penyelesaian, atau tak hingga banyaknya penyelesaian. **Teorema 2**. Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ yang invertible (dapat dibalik/ memiliki invers), maka untuk setiap matriks **b**, $n \times 1$, sistem persamaan A**x** = **b** tepat mempunyai satu penyelesaian, yaitu $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ **Teorema 3.** Anggap A adalah suatu matriks persegi. (a) Jika B adalah suatu matriks persegi yang memenuhi BA = I, maka $B = A^{-1}$. (b) Jika B adalah suatu matriks persegi yang memenuhi AB = I, $B = A^{-1}$. **Teorema 4**. Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka pernyatan-pernyataan berikut ekuivalen. (a) A invertible (b) Ax = O hanya mempunyai penyelesaian trivial (c) Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n (d) A dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks-matriks elementer. (e) A**x** = **b** konsisten untuk setiap matriks **b**, $n \times 1$ (f) A**x** = **b** tepat mempunyai satu penyelesaian untuk setiao matriks **b**, $n \times 1$. **Teorema 5**. Anggap A dan B adalah matriks-matriks ersegi berukuran sama. Jika AB invertible, maka A dan B juga pasti invertible.
8	9. 1 membuat klasifikasi dari	**DETERMINAN**

suatu permutasi

9. 2 mendefinisikan fungsi determinan melalui pemahaman permutasi dan hasil kali elementer.
9. 3 membentuk rumus determinan dari matriks persegi yang berordo empat.
9. 4 menentukan nilai determinan dari suatu matriks dengan menggunakan definisi determinan.

Untuk mendefinikan determinan perlu dipahami terlebih dahulu beberapa istilah, diantaranya:

Permutasi

Definisi. Suatu **permutasi** himpunan bilangan bulat (1, 2, ..., n} adalah suatu susunan bilangan-bilangan bulat ini dalam suatu urutan tanpa penghilangan atau pengulangan.

Untuk menyatakan permutasi umum dari himpunan {1, 2, ..., n}, akan dituliskan dengan (j_1, j_2, ..., j_n) dengan j_1 adalah bilangan bulat pertama dalam permutasi, j_2 adalah yang kedua, dan seterusnya.

Contoh: Ada enam permutasi yang berbeda dari dari himpunan bilangan bulat {1, 2, 3}. Permutasi-permutasi tersebut adalah (1, 2, 3), (1, 3, 2) , (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

Dalam suatu permutasi (j_1, j_2, ..., j_n) dikatakan terjadi **pembalikan**, jika suatu bilangan bulat yang lebih besar mendahului yang lebih kecil.

Definisi. Suatu permutasi disebut **genap** jika total jumlah pembalikan merupakan suatu bilangan bulat genap dan disebut **ganjil** jika total jumlah pembalikan merupakan suatu bilangan bulat ganjil.

Klasifikasi berbagai permutasi dari {1, 2, 3} sebagai genap atau ganjil, dapat dilihat pada table berikut.

Permutasi	Jumlah Pembalian	Klasifikasi
(1, 2, 3)	0	genap
(1, 3, 2)	1	ganjil
(2, 1, 3)	1	ganjil
(2, 3, 1)	2	genap
(3, 1, 2)	2	genap
(3, 2, 1)	3	ganjil

Hasil kali elementer dari A

		Hasil kali elementer dari matriks A yang berordo n $\times$ n adalah hasil kali dari n unsur matriks A yang berasal dari baris dan kolom yang berbeda. **Contoh**: (a) Hasil kali elementer dari matriks $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ adalah: $a_{11}a_{22}$ dan $a_{12}a_{21}$. (b) Hasil kali elementer dari matriks $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ adalah: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, dan $a_{13}a_{22}a_{31}$. **Hasil kali elementer bertanda dari A** Hasil kali elementer dari matriks A yang berordo n $\times$ n adalah hasil kali elementer yang dikalikan dengan +1 jika permutasi yang dinyatakan dengan $(j_1, j_2, ..., j_n)$ merupakan permutasi genap atau -1 jika $(j_1, j_2, ..., j_n)$ merupakan permutasi ganjil. **Contoh.** Daftarkan semua hasil kali elementer bertanda dari matriks-matriks (a) matriks $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ Penyelesaian: (a)

Hasil kali Dasar	Permutasi Terkait	Genap atau Ganjil	Hasil Kali Elementer Bertanda
$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	genap	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	ganjil	$-\ a_{12}a_{21}$

(b)

Hasil kali Dasar	Permutasi Terkait	Genap atau Ganjil	Hasil Kali Elementer Bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	ganjil	$-\ a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	ganjil	$-\ a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	genap	$a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	ganjil	$_{2}a_{31}$

Definisi Determinan

Determinan dari matriks persegi A dapat didefinisikan sebagai jumlah hasil kali elementer bertanda dari matriks tersebut. Secara simbolis dapat kita nyatakan bahwa determinan dari matriks A yang berordo n × n adalah det(A) =

$\sum \pm a_{1j_1} \ldots a_{nj_n}$.

		Contoh: Hitung determinan dari matriks (a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ **Penyelesaian:** (a) Jumlah hasil kali elementer bertanda dari matriks 2 × 2 adalah $a_{11}a_{22}$ - $a_{12}a_{21}$ sehingga nilai determinan dari matriks tersebut adalah 12 – (-10) = 22. (b) Jumlah hasil kali elementer bertanda dari matriks 3 × 3 adalah $a_{11}a_{22}a_{33}$ - $a_{12}a_{21}a_{33}$ - $a_{13}a_{21}a_{32}$ + $a_{11}a_{23}a_{32}$ + $a_{12}a_{23}a_{31}$ - $a_{13}a_{22}a_{31}$ sehingga nilai determinan dari matriks tersebut adalah -8 – 140 + 240 + 32 – 42 – 18 = 64. Pembentukan rumus untuk menghitung determinan yang ordonya lebih besar dari 3 × 3 dan contoh penggunaannya dilakukan oleh mahasiswa dan hasilnya didiskusikan
9	10. 1 membuktikan teorema-teorema sifat fungsi determinan. 10. 2 menentukan nilai determinan dengan bantuan teorema-teorema sifat determinan. 10. 3 menggunakan sifat determinant	**Menghitung Determinan dengan Pereduksian (Penghilangan Baris)** Dalam menghitung nilai determinan dengan cara pereduksian, digunakan teorema-teorema tentang determinan. Teorema-teorema yang digunakan tersebut adalah: **Teorema 1.** Anggap A adalah suatu matriks persegi (a) Jika A mempunyai sebuah baris nol atau kolom nol, maka det(A) = 0. (b) Det (A) = det (A’). **Teorema 2.** Jika A adalah suatu matriks segitiga n × n (segitiga atas, bawah, atau diagonal), maka det(A) adalah hasil kali anggota-angota pada diagonal utamanya, yaitu det(A) = $a_{11}a_{22}$ ... a_{nn}. **Teorema 3.** Anggap A adalah suatu matriks n × n

	untuk memeriksa invertibilitas suatu matriks.	(a) Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika suatu baris tunggal atau kolom tunggal dari A dikalikan dengan suatu scalar k, maka det(B) = k det(A). (b) Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika dua baris atau dua kolom dari A dipertukarkan, maka det(B) = - det(A). (c) Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika suatu penggandaan suatu baris A ditambahkan pada baris lainnya atau jika suatu penggandaan suatu kolom ditambahkan pada kolom lainnya, maka det(B) = det(A). **Teorema 4.** Anggap E adalah suatu matriks dasar $n \times n$ (a) Jika E dihasilkan dari mengalikan suatu baris dari I_n dengan k, maka det(E) = k. (b) Jika E dihasilkan dari mempertukarkan dua baris dari I_n, maka det(E) = -1. (c) Jika E dihasilkan dari menambahkan suatu penggandaan suatu baris dari I_n ke baris lainnya, maka det(E) = 1 **Teorema 5.** Anggap A adalah suatu matriks $n \times n$ dengan dua baris prporsional atau dua kolom proporsional, maka det(A) = 0. **Sifat-sifat Fungsi Determinan** Anggap A dan B matriks $n \times n$ dan k adalah sembarang scalar, maka berlaku hubungan: (a) $\det(kA) = k^n \det(A)$. (b) $\text{Det}(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ **Teorema-teorema Fungsi Determinan**

		Teorema 1. Anggap A, B, C adalah matriks n × n yang berbeda hanya pada salah satu barisnya, katakanlah baris ke-r, dan anggap baris kr-r dari C bias diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota yang berpadanan pada baris ke-r dari A dan B. Maka det(C) = det(A) + det(B). Hasil yang sama berlaku untuk kolom. **Contoh** $\text{Det}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **Teorema 2.** Suatu matriks persegi A dapat dibalik jika dan hanya jika (A) det(A) $\neq$ 0. **Teorema 3.** Jika A dan B adalah matriks persegi berukuran sama, maka det(AB) = det(A) . det(B). **Teorema 4.** Jika A bisa dibalik (invertible), maka det(A^{-1}) = $\frac{1}{\det(A)}$.
10	11. 1 mencari minor dari suatu unsur. 11. 2 mencari kofaktor dari suatu unsur. 11. 3 menentukan nilai determinan dari suatu matriks dengan menggunakan kofaktor. 11. 4 mencari adjoint dari suatu	**Definisi.** Jika A adalah suatu matriks bujursangkar, maka minor a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari sub matriks setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{1+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan disebut kofaktor dari unsur a_{ij}. **Contoh**. Jika A $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, maka Minor dari a_{11} adalah M_{11}= $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ = -12 Kofaktor a_{11} adalah $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$= 12

	matriks. 11. 5 dapat menentukan invers dari suatu matriks invertible dengan menggunakan adjoint. 11. 6 menggunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan suatu SPL.	Minor dari a_{23} adalah $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3$ Kofaktor a_{23} adalah $C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 3$, dst. Kalau diperhatikan, ternyata $C_{ij} = \pm M_{ij}$. Perluasan Kofaktor Selain dengan cara-cara yang sudah diuraikan pada bagian lain (menggunakan definisi dan pereduksian yang disertai dengan teorema-teorema yang berlaku), untuk mencari nilai determinan dapat juga dilakukan dengan perluasan kofaktor. Untuk keperluan tersebut perhatikan teorema berikut. **Teorema 1.** Determinan suatu matrik $A_{n \times n}$ bisa dihitung dengan mengalikan anggota-anggota pada sembarang baris (kolom) dengan faktornya dan menjumlahkan hasil kali yang didapatkan; yaitu untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + anjCnj$ (perluasan kofaktor di sepanjang kolom ke-j) dan $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{2j}C_{2j} + \dots + anjCnj$ (perluasan kofaktor di sepanjang baris ke-i). **Contoh** Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, maka perhitungan det(A) dengan perluasan kofaktor di sepanjang baris pertama dapat dilakukan sebagai berikut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-12) - 7(11) + 5(8) = -49$$ *Type equation here.*

dan perhitungan det(A) dengan perluasan kofaktor di sepanjang kolom kedua adalah:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-7)\,(11) - 4(-7)$$

$$= -49$$

Untuk menghitung nilai determinan yang ordonya besar, dapat dilakukan dengan menggabungkan cara pereduksian dengan perluasan kofaktor.

Adjoint dari suatu matriks

Definisi. Jika A adalah sembarang matriks n × n dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$ disebut matriks kofaktor dari A. Transpos dari matriks ini disebut adjoin A dan dinyatakan dengan adj(A).

Contoh

		Jika A = $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ Kofaktor dari A adalah : C_{11} = 12 C_{12} = 6 C_{13} = - 16 C_{21} = 4 C_{22} = 2 C_{23} = 16 C_{31} = 12 C_{32} = =10 C_{33} = 16 Sehingga matriks operatornya adalah $\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & 10 & 16 \end{bmatrix}$ dan adjoin A adalah $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & 10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$ **Invers suatu matriks** Salah satu cara mencari invers dari suatu matriks adalah dengan menggunakan adjoin, rumusnya dituliskan da**lam teorema berikut.** **Teorema 2. Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka** $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} adj(A)$

Aturan Cramer

Aturan Cramer merupakan salah satu cara untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan syarat determinan dari matriks koefisiennya tidak sama dengan nol.

Teorema. Jika Ax = b merupakan suatu sistem persamaan linear dalam n peubah sedemikian sehingga det(A) $\neq$ 0, maka sistem tersebut mempunyai suatu penyelesaian yang unik. Penyelesaian ini adalah

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{\det(An)}{\det(A)}$$

Dengan A_j adalah matriks yang dperoleh dengan menggantikan anggota-anggota pada kolom j dari A dengan anggota-anggota pada matriks b = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Contoh.

Selesaikanlah sistem persamaan berikut dengan menggunakan aturan Ceamer.

$$x_1 + 2x_3 = 6$$
$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8$$

Penyelesaian:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ A_1 = $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ A_2 = $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ A_3 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Dengan demikian

		$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$, $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$, $x_3 = \frac{\det(An)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$
	12. 1 menentukan faktor dari suatu transformasi tertentu. 12. 2 menentukan persamaan bayangan suatu bangun geometri yang disebabkan oleh suatu transformasi tertentu. 12. 3 menentukan matriks operator dari suatu transformasi bidang. 13. 1 menentukan matriks operator dari suatu komposisi transformasi bidang. 13. 2 menentukan bayangan suatu bangun	**Refleksi, Rotasi, dan Dilatasi** Pada bagian ini dibicarakan bagaimana cara mendapatkan matriks operator untuk beberapa transformasi, yaitu matrik: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ untuk matriks operator refleksi terhadap sumbu x, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ untuk matriks operator refleksi terhadap sumbu y, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ untuk matriks operator refleksi terhadap garis y = x, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ untuk matriks operator refleksi terhadap garis y = -x, $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ untuk matriks operator rotasi terhadap O dan sudut putar sebesar α $\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ untuk matriks operator dilatasi dengan faktor skala p dan pusat perkalian O. **Komposisi Transformasi Bidang.** Dalam bagian ini didiskusikan bagaimana menentukan matriks operator untuk komposisi transformasi. Hasil transformasi didapatkan dengan cara mengalikan matriks operator dengan koordinat asalnya (x, y). Dengan demikian untuk matriks operator komposisi transformasi kita dapatkan dengan cara mengalikan

	geometri yang disebabkan oleh suatu komposisi transformasi	matriks-matriks operator untuk masing-masing refleksinya.