Hands Out

Mata Kuliah: Aljabar Matriks (2 SKS)

Dosen: Dra. Hj Ade Rohayati, M. Pd.

No.	Indikator	Uraian Materi
1	1.1 menyebutkan definisi matriks. 1. 2 membuat beberapa contoh matriks dengan menggunakan notasi yang tepat. 1. 3 menentukan ordo dari suatu matriks yang diberikan. 1. 4 menuliskan bentuk umum dari matriks yang berordo m x n. 1. 5 menentukan letak suatu unsur dari suatu matriks yang diberikan.	**Matriks** **Definisi**. **Matriks** adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat yang diatur dalam baris dan kolom Bilangan-bllangan dalam susunan itu disebut anggota/elemen/unsure dari matriks tersebut. **Cara memberi nama suatu matriks dan unsur-unsurnya.** Suatu matriks diberi nama dengan menggunakan huruf kapital seperti A, B, C, dan sterusnya, sedangkan anggotanya dinyatakan dengan huruf kecil. Anggota dari suatu matriks dapat pula dinyatakan dengan huruf kecil yang berindeks ganda (a_{ij}) , dengan indeks pertama menyatakan di baris mana unsur itu terletak dan indeks kedua menyatakan di kolom mana unsur itu terletak. Sebagai contoh a_{12} artinya unsur tersebut terletak pada baris kesatu dan kolom kedua. Begitu juga a_{23} artinya unsur tersebut terletak pada baris kedua dan kolom ketiga. **Cara menyatakan matriks** Notasi yang digunakan untuk menyatakan matriks bisa dengan kurung kecil : ( ), kurung siku : [ ]}, atau dengan garis tegak dobel : ‖ ‖. Contoh: A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ $atau\ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ $atau\ A = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Vmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ **Odo/Ukuran/Order dari suatu matriks** Ordo/ukuran dari suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom yang dimiliki oleh matriks tersebut. Contoh: Matriks A pada contoh di atas meniliki **dua buah baris** dan **tiga buah kolom**, sehingga kita katakana matriks A berordo $2 \times\ 3$ dan ditulis $A_{2\times3}$. Begitu juga matriks B meniliki **dua buah baris** dan **dua buah kolom**, sehingga kita katakana matriks B berordo $2 \times\ 2$ dan ditulis $B_{2\times2}$.

		Bentuk umum suatu matriks Secara umum suatu matriks dituliskan dengan $A_{m\times n}$ dengan m menyatakan banyaknya baris dan n menyatakan banyaknya kolom. Dengan demikian m = 1, 2, 3, ..., m dan n = 1, 2, 3, ..., n, sehingga bentuk umumnya: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
2	2. 1 merumuskan definisi jenis matriks tertentu melalui pengamatan terhadap matriks-matriks yang diberikan. 2. 2 membedakan jenis-jenis matriks. 2. 3 membuat kaitan antara matriks diagonal, matriks skalar, dan matriks satuan. 2. 4 membuat minimal sebuah contoh untuk masing-masing jenis	**Macam-macam Matriks** **Matriks persegipanjang**: matriks yang memiliki banyak baris tidak sama dengan banyaknya kolom. Contoh : A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -7 \end{bmatrix}$ **Matriks persegi:** matriks yang memiliki banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Contoh: B = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ **Matriks nol**: matriks yang semua unsurnya nol. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Matriks baris/ vektor baris: matriks yang hanya terdiri dari satu baris. C = [redacted] $1 \quad 0 \quad -2$

	matriks.	Matriks kolom/ vektor klom: matriks yang hanya terdiri dari satu kolom. Contoh : K = $\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ **Matriks diagonal**: matriks persegi yang unsur-unsur selain unsur diagonal utamanya adalah nol. Contoh : D = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ = Diag (0, -1, 3) **Matriks skalar**: matriks diagonal yang semua unsur diagonal utamanya adalah skalar k yang sama. Contoh : A = $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **Matriks satuan/Matriks Identitas:** matriks skalar yang semua unsur diagonal utamanya 1. Contoh : I_3 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, I_2 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **Matriks segitiga atas**: matriks persegi yang semua unsur di bawah diagonal utamanya nol. Atau dapat dikatakana suatu matriks persegi A = [a_{ij}] adalah segitiga atas jika dan hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk i > j. Contoh : C = $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **Matriks segitiga bawah**: matriks persegi yang semua unsur di atas diagonal utamanya nol. Atau dapat dikatakana

suatu matriks persegi A = [a_{ij}] adalah segitiga bawah jika dan hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$.

Contoh : $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

Matriks simetri: matriks persegi yang semua unsur a_{ij} = unsur a_{ji} untuk setiap i dan j.

Contoh : $S = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Matrix anti symmetry/simetri miring (skew symetry): matriks persegi yang semua $a_{ij} = - a_{ji}$ untuk setiap i dan j.

Contoh : $K = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Dst.

2	3. 1 menentukan syarat penjumlahan dua buah matriks agar terdefinisi. 3. 2 menentukan syarat pengurangan dua buah matriks agar terdefinisi. 3. 3 menentukan syarat perkalian matriks dengan matriks agar terdefinisi. 3. 4 menjumlahkan dua buah matriks 3. 5 melakukan operasi pengurangan matriks. 3. 6 mengalikan skalar dengan matriks. 3. 7 mengalikan matriks dengan matriks 3. 8 mencari unsur-unsur a_{ij} dari suatu hasil kali matriks dengan matriks untuk i dan j	**Definisi**. Jika A dan B adalah **matriks-matriks yang berukuran sama**, maka jumlah **A + B** adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota B dengan anggota-anggota A yang berpadanan, dan selisih **A – B** adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B yang berpadanan. Matriks-matriks **berukuran berbeda** tidak bisa ditambahkan atau dikurangkan. Contoh: A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -7 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & -5 & -6 \end{bmatrix}$, maka A + B = $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 9 & -10 & -13 \end{bmatrix}$ dan A – B = A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **Definisi**. Jika A adalah sembarang matriks dan k adalah sembarang skalar, maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A dengan k. Contoh: A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ dan k = 3, maka kA = $\begin{bmatrix} 3 & 15 & 6 \\ -9 & 6 & 12 \\ 12 & 12 & -3 \end{bmatrix}$ **Definisi**. Jika A adalah sebuah matriks m $\times$ r *dan B adalah sebuah matriks* $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks m $\times$ n yang unsur-unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j nya diperoleh dengan menjumlahkan hasil kali unsur-unsur yang berpadanan dari baris ke- dan kolom ke-j. Contoh: A = = $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, maka AB = $\begin{bmatrix} 2+4+8 & 0+20+12 & -6+8-10 & 4-12+6 \\ -5+6+28 & 0+30+42 & 15+12-35 & -10-18+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 32 & -8 & -2 \\ 29 & 72 & -8 & -7 \end{bmatrix}$ **Mencari unsur-unsur yang terletak pada baris atau kolom tertentu dari hasil kali dua buah matriks**

	tertentu tanpa mencari hasil kali secara keseluruhan. 3. 9 menentukan transpos dari suatu matriks. 3. 10 menentukan trace dari suatu matriks. 3. 11 membuktikan teorema-teorema operasi hitung matriks.	**Contoh:** jika B = $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix}$, a) Carilah unsur-unsur **baris kesatu** dari hasil kali matriks B dan C, b) Carilah unsur-unsur **kolom kedua** dari hasil kali matriks B dan C, **Jawab**: a) Unsur-unsur **baris kesatu** dari hasil kali BC didapatkan dengan cara mengalikan $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -16 & 16 \end{bmatrix}$ b) Unsur-unsur **kolom kedua** dari hasil kali BC didapatkan dengan cara mengalikan $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -3 \\ -28 \end{bmatrix}$ **Transpos dari suatu Matriks** **Definisi.** Jika A adalah matriks yang berordo m $\times$ n, maka transpose A, dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks n $\times$ m yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dan kolom dari A; yaitu kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya. Contoh :

Jika B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ D = [7], maka

$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ $C^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}$ $D^T = [7]$

Trace dari suatu Matriks

Definisi. Jika A adalah suatu matriks persegi, maka **trace A**, dinyatakan dengan tr(A), didefinisikan sebagai jumlah anggota-anggota pada diagonal utama A.

Contoh: Berikut adalah contoh-contoh matriks dan trace-nya.

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & \\ 5 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

tr(A) = $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ tr(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 12

Teorema-teorema Operasi Hitung Matriks.

Teorema 1. Dengan menganggap bahwa ukuran matriks-matriks di bawah ini adalah sedemikian hingga operasi yang ditunjukkan bisa dilakukan, maka aturan-aturan aritmetika berikut ini adalah sahih.

(a) A + B = B + A (hukum komutatif untuk penjumlahan)

(b) A + (B + C) = (A + B) + C (hukum asosiatif untuk penjumlahan)

(c) A(BC) = (AB)C (hokum asosiatif untuk penjumlahan)

(d) A(B + C) = AB + AC (hukum distributif kiri)

		(e) $(B + C)A = BA + CA$ (hukum distributif kanan) (f) $A(B - C) = AB - AC$ (g) $(B - C)A = BA – CA$ (h) $a(B + C) = aB + aC$ (i) $a(B - C) = aB - aC$ (j) $(a + b) C = aC + bC$ (k) $(a - b) C = aC - bC$ (l) $A(bC) = (ab)C$ (m) $A(BC) = (aB)C = B(aC)$ **Teorema 2.** Dengan menganggap ukuran matriks adalah sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan bisa dilakukan, aturan-aturan aritmetika matriks berikut ini adalah sahih. (a) $A + O = O + A = A$ (b) $A – A = O$ (c) $O – A = -A$ (d) $AO = O; OA = O$ **Teorema 3.** Jika R adalah sebuah matriks $n \times n$ dari matriks A berbentuk eselon-baris tereduksi, maka R mempunyai sebuah baris nol atau R merupakan matriks identitas I_n. **Teorema 4.** Jika B dan C keduanya adalah invers dari matriks A, maka B = C **Teorema 5**. Jika A dan B adalah matriks-matriks yang invertible dan berukuran sama, maka : (a) AB invertible (b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
	4.1 membuat contoh persamaan	**Persamaan Linear**

	linear. 4. 2 membedakan antara contoh dan bukan contoh persamaan linear dari contoh-contoh persamaan yang diberikan. 4. 3 menyebutkan definisi sistem persamaan linear. 5. 1 membedakan antara matriks yang berbentuk eselon baris dan eselon baris tereduksi 5. 2 mereduksi suatu matrik yang diperbesar dari suatu SPL menjadi bentuk eselon baris. 5. 3 mereduksi suatu matriks yang diperbesar dari suatu SPL menjadi bentuk eselon baris	Persamaan linear adalah persamaan yang pangkat tertinggi dari peubah/variabelnya adalah satu. Suatu persamaan linear dalam 2 peubah x, y dapat ditulis $a_1x + a_2y = b$ Suatu persamaan linear dalam n peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dapat disajikan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b konstanta real. **Beberapa contoh persamaan linear** $x + 3y = 7$ $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$ $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ **Beberapa contoh yang bukan persamaan linear** $x + 3y^2 = 7$ $y - \sin x = 0$ $3x + 2y - z + xz = 4$ $\sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$ **Sistem Persamaan Linear** **Definisi.** Sebuah himpunan terhingga persamaan linear dalam peubah-peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut sebuah **sistem persamaan linear** atau sebuah **sistem linear**. Sederet angka $s_1, s_2, \ldots, s_n$ disebut suatu **penyelesaian** sistem tersebut jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. merupakan penyelesaian dari setiap persamaan dalam sistem tersebut. **Bentuk umum sistem persamaan linear dengan m persamaan dan n variabel** $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

	terteduksi. 5. 4 menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dengan eliminasi Gauss. 5. 5 menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dengan eliminasi Gauss-Jordan. 5. 6 Membuat minimal sebuah contoh SPL tak konsisten yang mempunyai peubah yang lebih banyak daripada persamaannya. 6. 1 menuliskan bentuk umum SPL homogen yang terdiri dari m persamaan dengan n variabel. 6. 2 membuat contoh SPL homogen yang	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ $a_{211}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$ $\vdots \qquad \vdots$ $a_{m11}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = bm$ Contoh sistem persamaan linear dengan 2 persamaan dan 3 variabel : $4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$ $3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$ Sistem tersebut mempunyai penyelesaian $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, karena nilai-nilai ini memenuhi kedua persamaan di atas. Akan tetapi, $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$ bukanlah penyelesaian karena nilai-nilai ini hanya memenuhi persamaan pertama dari sistem. **Jenis penyelesaian dari sistem persamaan linear SPL)** Suatu SPL mungkin memiliki tepat satu penyelesaian, tidak memiliki penyelesaian , atau memiliki banyak (tak hingga) penyelesaian. SPL yang tidak memiliki penyelesaian disebut **inconsistent.** Contoh SPL yang memiliki tepat satu penyelesaian: $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$ Contoh SPL yang tidak memiliki penyelesaian: $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 164x_4 &= 5 \end{aligned}$ Contoh SPL yang memiliki banyak penyelesaian: $5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$

	memiliki penyelesaian trivial. 6. 3 membuat contoh SPL homogen yang memiliki penyelesaian tak trivial. 6. 4 meyelesaikan SPL homogen. 6. 5 membedakan SPL homogen yang mempunyai penyelesaian trivial dan non trivial. 6. 6 menentukan gambaran geometris dari suatu SPL homogeny yang memiliki penyelesaian trivial.. 6. 7 menentukan gambaran geometris dari suatu SPL homogen yang memiliki penyelesaian taktrivial.	$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$ Untuk mencari penyelesaian dari sistem persamaan linear, dapat digunakan pereduksian terhadap augmented matrix (matriks yang diperbesar) dengan menerapkan tiga jenis operasi baris elementer (OBE), yaitu: 1. Kalikan sebuah baris dengan sebuah konstanta tak-nol. 2. Pertukarkan dua baris 3. Tambahkan perkalian dari suatu baris ke baris lainnya. **Eliminasi Gaussian** Untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dapat digunakan eliminasi Gaussia, yaitu pereduksian terhadap augmented matrix sampai bentuk **eselon baris** atau **eselon baris tereduksi**. Jika pereduksian dilakukan sampai diperoleh bentuk eselon baris, maka disebut **eliminasi Gauss** dan jika dilakukan hingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi maka disebut **eliminasi Gauss-Jordan**. Contoh : Selesaikan SPL: $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$ Untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut pertama-tama kita harus menuliskan augmented matrix-nya terlebih dahulu, yaitu: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$. Selanjutnya reduksilah dengan menggunakan OBE hingga didapatkan matriks dalam bentuk eselon baris $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ .... (1)

atau matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ .... (2)

Sifat-sifat matriks yang berbentuk eselon baris tereduksi

1. Jika suatu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka angka tak-nol pertama dalam baris tersebut adalah angka 1. (Kita sebut 1 utama).
2. Jika ada sembarang baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini dikelompokkan bersama di bagian bawah matriks.
3. Jika dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, 1 utama dalam baris yang lebih bawah terletak di sebelah kanan 1 utama dalam baris yang lebih atas.
4. Masing-masing kolom yang berisi sebuah 1 utama mempunyai nol di tempat lainnya.

Suatu matriks yang memiliki sifat **1, 2, dan 3** (tetapi tidak perlu 4) disebut mempunyai **bentuk eselon baris**.

Sistem persamaan yang berkoresponden dengan bentuk (1) adalah:

$x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 9$

$x_2 + \frac{7}{2}x_3 = -\frac{17}{2}$

$x_3 = 3$

Sistem persamaan yang berkoresponden dengan bentuk (2) adalah:

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = 3$

Dari contoh di atas, terlihat bahwa: Jika kita bekerja sampai didapatkan matriks yang berbentuk **eselon baris tereduksi**, maka kita langsung mendapatkan **harga untuk variabel utamanya**, yaitu $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 3$

Jika kita bekerja sampai didapatkan matriks yang **berbentuk eselon baris**, maka kita harus melakukan **substitusi balik**, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Selesaikan persamaan untuk peubah-peubah utama
2. Mulai dari persamaan yang paling bawah dan lanjutkan ke atas, secara berturut-urut substitusikan masing-masing persamaan ke semua persamaan di atasnya.

SPL Homogen

Bentuk umum SPL homogen dengan m persamaan dan n variabel adalah:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{211}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{m11}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Jenis Penyelesaian SPL Homogen

Ada dua kemungkinan jenis penyelesaian SPL homogen , yaitu penyelesaian **trivial** dan penyelesaian **non-trivial**.

Tak ada satu pun SPL homogen yang inconsistent, karena minimal memiliki penyelesaian trivial.

Contoh SPL homogen yang mempunyai **penyelesaian trivial**:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Contoh SPL homogen yang mempunyai **penyelesaian non-trivial**:

$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$

Menyelesaikan SPL Homogen

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Untuk menyelesaikan SPL homogen caranya serupa dengan cara untuk menyelesaikan SPL, yaitu dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.
Gambaran geometris dari suatu SPL homogen, yang memiliki penyelesaian trivial, berupa garis-garis yang berpotongan di titik pangkal. Sedangkan gambaran geometris dari suatu SPL homogen, yang memiliki penyelesaian non-trivial, berupa garis-garis yang berimpit dan berpotongan di titik pangkal.</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>7. 1 menyebutkan definisi matriks elementer.
7. 2 membuat contoh matriks elementer.
7. 3 membedakan matrks elementer dan bukan matriks elementer.
7. 3 menentukan operasi baris yang akan mengembalikan matriks elementer yang diberikan pada matriks satuan.

8. 1 menentukan invers suatu matriks dengan OBE.
8. 2 menentukan</td>
<td>Matriks Elementer
Definisi. Suatu matriks n × n disebut matriks elementer (dasar) jika matriks ini bisa diperoleh dari suatu matriks identitas n × n, I_n dengan melakukan suatu operasi baris tunggal.
Beberapa contoh matriks elementer:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Kalikan baris kedua I_2 dengan -7
Pertukarkan baris Kedua dan keempat Dari I_4
Kalikan baris Pertama dari I_3 dengan 1
Tambahkan 2 kali baris ketiga dari I_3 pada baris pertama

Beberapa contoh bukan matriks elementer</td>
</tr>
</table>

singularitas suatu matriks.

8. 3 membuktikan teorema-teorema invers matriks.

8. 4 menggunakan invers matriks untuk menyelesaikan SPL

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika kita membuat matriks elementer dari matriks satuan dengan OBE tertentu, maka kita bias melakukan operasi balikannya untuk menghasilkan kembali matriks satuan dari matriks elementer. Operasi-operasi tersebut dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1

Operasi baris pada I yang menghasilkan E	**Operasi baris pada E yang menghasilkan I lagi**
Kalikan baris i dengan c $\neq 0$	Kalikan baris i dengan 1/c
Pertukarkan baris i dan j	Pertukarkan baris i dan j
Tambahkan c kali baris i ke baris j	Tambahkan -c kali baris i ke baris j

Beberapa Teorema yang Berkaitan dengan Matriks Elementer

Teotema 1. Jika matriks elementer E dihasilkan dari suatu operasi baris tertentu terhadap I_n dan jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka hasil kali EA adalah matriks yang dihasilkan jika operasi baris yang sama dikenakan pada A.

Teorema 2. Setiap matriks elementer invertible, dan inversnya juga merupakan suatu matriks elementer.

Teorema 3. Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka pernyatan-pernyataan berikut ini ekuivalen, yaitu semua benar atau semua salah.

(a) A invertible

(b) Ax = O hanya mempunyai penyelesaian trivial

		(c) Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n (d) A dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks-matriks elementer. Dari teorema 3 di atas (a) dan (c) dapat dikatakan bahwa suatu matriks yang memiliki invers, determinannya $\neq 0$ dan disebut **singular**. Untuk mendapatkan **invers dari suatu matriks A** yang inverible, kita harus menemukan serangkaian OBE yang mereduksi A menjadi **matriks Identitas** dan kemudian melakukan serangkaian operasi yang sama pada $\mathbf{I_n}$ untuk memperoleh invers **A**. **Sistem Persamaan Linear dan Keterbalikan** **Teorema 1.** Setiap system persamaan linear bias tidak mempunyai penyelesaian, tepat satu penyelesaian, atau tak hingga banyaknya penyelesaian. **Teorema 2**. Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ yang invertible (dapat dibalik/ memiliki invers), maka untuk setiap matriks **b**, $n \times 1$, sistem persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tepat mempunyai satu penyelesaian, yaitu $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ **Teorema 3.** Anggap A adalah suatu matriks persegi. (a) Jika B adalah suatu matriks persegi yang memenuhi BA = I, maka $B = A^{-1}$. (b) Jika B adalah suatu matriks persegi yang memenuhi AB = I, $B = A^{-1}$. **Teorema 4**. Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka pernyatan-pernyataan berikut ekuivalen. (a) A invertible (b) Ax = O hanya mempunyai penyelesaian trivial (c) Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n (d) A dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks-matriks elementer. (e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten untuk setiap matriks **b**, $n \times 1$

(f) A**x** = **b** tepat mempunyai satu penyelesaian untuk setiao matriks **b**, n × 1.

Teorema 5. Anggap A dan B adalah matriks-matriks ersegi berukuran sama. Jika AB invertible, maka A dan B juga pasti invertible.

8

9. 1 membuat klasifikasi dari suatu permutasi
9. 2 mendefinisikan fungsi determinan melalui pemahaman permutasi dan hasil kali elementer.
9. 3 membentuk rumus determinan dari matriks persegi yang berordo empat.
9. 4 menentukan nilai determinan dari suatu matriks dengan menggunakan definisi determinan.

DETERMINAN

Untuk mendefinikan determinan perlu dipahami terlebih dahulu beberapa istilah, diantaranya:

Permutasi

Definisi. Suatu **permutasi** himpunan bilangan bulat (1, 2, ..., n} adalah suatu susunan bilangan-bilangan bulat ini dalam suatu urutan tanpa penghilangan atau pengulangan.

Untuk menyatakan permutasi umum dari himpunan {1, 2, ..., n}, akan dituliskan dengan $(j_1, j_2, ..., j_n)$ dengan j_1 adalah bilangan bulat pertama dalam permutasi, j_2 adalah yang kedua, dan seterusnya.

Contoh: Ada enam permutasi yang berbeda dari dari himpunan bilangan bulat {1, 2, 3}. Permutasi-permutasi tersebut adalah (1, 2, 3), (1, 3, 2) , (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

Dalam suatu permutasi $(j_1, j_2, ..., j_n)$ dikatakan terjadi **pembalikan**, jika suatu bilangan bulat yang lebih besar mendahului yang lebih kecil.

Definisi. Suatu permutasi disebut **genap** jika total jumlah pembalikan merupakan suatu bilangan bulat genap dan disebut **ganjil** jika total jumlah pembalikan merupakan suatu bilangan bulat ganjil.

Klasifikasi berbagai permutasi dari {1, 2, 3} sebagai genap atau ganjil, dapat dilihat pada table berikut.

Permutasi	Jumlah Pembalian	Klasifikasi
(1, 2, 3)	0	genap
(1, 3, 2)	1	ganjil
(2, 1, 3)	1	ganjil
(2, 3, 1)	2	genap

(3, 1, 2)	2	genap
(3, 2, 1)	3	ganjil

Hasil kali elementer dari A

Hasil kali elementer dari matriks A yang berordo n × n adalah hasil kali dari n unsur matriks A yang berasal dari baris dan kolom yang berbeda.

Contoh:

(a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

(a) Hasil kali elementer dari matriks tersebut adalah: $a_{11}a_{22}$ dan $a_{12}a_{21}$.

(b) Hasil kali elementer dari matriks tersebut adalah: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, dan $a_{13}a_{22}a_{31}$.

Hasil kali elementer bertanda dari A

Hasil kali elementer bertanda dari matriks A yang berordo n × n adalah hasil kali dari n unsur matriks A yang berasal dari baris dan kolom yang berbeda yang dikalikan dengan +1 jika permutasinya genap dan dikalikan dengan -1 jika permutasinya ganjil.

Contoh :

Jika diketahui martiks (a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka untuk mendapatkan hasil kali elementer bertanda dari matriks-matriks tersebut dapat dilihat pada table berikut.

(a)

Hasil kali elementer	Permutasi Terkait	Genap atau Ganjil	Hasil Kali Elemeneter Bertanda
$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	genap	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	ganjil	$-a_{12}a_{21}$

(b)

Hasil kali elementer	Permutasi Terkait	Genap atau Ganjil	Hasil Kali Elemeneter Bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2,3)	genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Definisi determinant

Jika A suatu matriks persegi, maka fungsi determinant dari A dinyatakan dengan det(A) yang didefinisikan sebagai jumlah hasil kali elementer bertanda dari A.

Cntoh:

Jika diketahui martiks (a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka determinantnya adalah

(a) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(b) $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

9	10. 1 membuktikan teorema-teorema sifat fungsi determinan. 10. 2 menentukan nilai determinan dengan bantuan teorema-teorema sifat determinan. 10. 3 menggunakan sifat determinant untuk memeriksa invertibilitas suatu matriks.	**Teorema fungsi determinant** Dua buah contoh teorema yang berkaitan dengan fungsi determinan dapat dibaca di baah ini. **Teorema 1.** Anggap A suatu matriks persegi. (a) Jika A mempunyai sebuah baris nol atau sebuah kolom nol, maka det(A) = 0. **(b)** Det(A) = det(A’). **Contoh bukti untuk bagian (a)** Karena setiap hasil kali elementer bertanda dari A mempunyai salah satu faktor dari masing-masing baris dan satu faktor dari masing-masing kolom, maka setiap hasil kali elementer bertanda pasti akan mempunyai faktor dari suatu baris nol atau suatu kolom nol. Oleh karena itu setiap hasil kali elementer bertandanya akan bernilai nol dank arena det(A) merupakan jumlah hasil kali elementer bertanda, maka det(A) adalah nol. **Teorema 2.** Jika A adalah suatu matriks segitiga n × n (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka det(A) adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya, yaitu det(A) = $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$. **Contoh 1** Jika diketahui A = $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka satu-satunya hasil kali elemnter bertanda dari A yang tidak nol adalah hasil kali diagonal utamanya. Oleh karena itu, det(A) = $a_{11}a_{22}a_{33}$ **Contoh 2** Jika diketahui A = $\begin{bmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, maka det(A) = -30

$C_{11} =$

		Memeriksa invertibilitas suatu matriks dengan menggunakan sifat determinant. Terdapat beberapa teorema yang berkaitan dengan invers dari suatu matriks. Untuk memeriksa ada atau tidak adanya invers dari suatu matriks dapat digunakan teorema 1 berikut. **Teorema 1.** Suatu matriks A memiliki invers jika dan hanya jika det(A) $\neq$ 0. Contoh 1 Apakah matriks A = $\begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ memiliki invers? Jawab: Karena baris kesatu dan baris ketiga proporsional, maka det(A) = 0. Jadi A tidak memiliki invers. Contoh 2 Apakah matriks A = $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ memiliki invers? Jawab: Det(A) = 8. Jadi, A memiliki invers. **Teorema 2.** Jika A dan B adalah matriks-matriks persegi berukuran sama, maka det(AB) = det(A) det(B). **Teorema 3.** Jika A memiliki invers, maka det(A^{-1}) = $\frac{1}{\det(A)}$.
10	11. 1 mencari minor dari suatu unsur. 11. 2 mencari kofaktor dari	**Minor dan Kofaktor** **Definisi.** Jika A adalah suatu matriks persegi, maka **minor anggota a_{ij}** dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinant sub matriks yang masih tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j

	suatu unsur. 11. 3 menentukan nilai determinan dari suatu matriks dengan menggunakan kofaktor. 11. 4 mencari adjoint dari suatu matriks. 11. 5 dapat menentukan invers dari suatu matriks invertible dengan menggunakan adjoint. 11. 6 menggunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan suatu SPL.	dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}$ M_{ij} dinyatakan oleh C_{ij} dan disebut **kofaktor anggota a_{ij}**. **Contoh** Jika A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan M_{11}, M_{23}, C_{11}., dan C_{23} **Jawab :** $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$ dan $C_{11} = 1$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$ dan $C_{23} = -1$ **Adjoint dari suatu matriks** Definisi. Jika A adalah sebarang matriks n × n, dan C_{ij}adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$ disebut **matriks kofaktor dari A.** Transpos dari matriks ini disebut adjoint A dan dinyatakan oleh Adj**(A).** **Contoh** Jika A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ Kofaktor dari A adalah $C_{11} = 12$ $C_{12} = 6$ $C_{13} = -16$

$C_{21} = 4$ $C_{22} = 2$ $C_{23} = 16$

$C_{31} = 12$ $C_{32} = -10$ $C_{33} = 16$

Sehingga matriks kofaktornya adalah

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

an adjoint A adalah

$$\text{Adj(A)} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Menentukan invers dari suatu matriks invertible dengan menggunakan adjoint.

Untuk menentukan invers dari suatu matriks digunakan rumus $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$ adj(A)..

Contoh

Tentukan invers dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan adjoint.

Jawab:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj(A)} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & \frac{-10}{64} \\ \frac{-16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

Aturan Cramer

Teorema (Aturan Ceamer). Jika A**x** = **b** merupakan suatu system n persamaan linear dengan n variabel sedemikian hingga det(A) ≠ 0, maka system tersebut mempunyai penyelesaian yang unik. Penyelesaian ini adalah

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan anggota-anggota pada kolom ke-j dari A dengan anggota-anggota pada matriks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh

Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan

$$\begin{aligned} x \qquad\quad + 2z &= 6 \\ -3x + 4y + 6z &= 30 \\ -x - 2y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian

		$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$