Aritmatika Modular

Banyak konsep aritmatika jam dapat digunakan untuk mengerjakan masalah-masalah yang berkenaan dengan kalender. Misalkan, hari minggu pada bulan Juli 2006 jatuh pada tanggal 2, 9, 16, 23, dan 30. Selisih dari sebarang dua buah tanggal-tanggal tersebut mempunyai kelipatan 7. Tanggal 1 dan tanggal 29 jatuh pada hari yang sama karena $29 - 1 = 28$ dan 28 adalah juga kelipatan 7. Kita katakan bahwa 29 adalah kongruen 1 modulo 7 dan kita tulis $29 \equiv 1 \pmod{7}$. Hal yang sama, karena selisih 18 dan 6 adalah kelipatan 12, kita tulis $18 \equiv 6 \pmod{12}$. Hal ini membawa kita kepada definisi berikut.

Definisi

Misalkan n adalah suatu bilangan bulat positif, a dan b adalah suatu bilangan bulat. a dikatakan kongruen b modulo n, ditulis

$$a \equiv b \pmod{n}$$

jika dan hanya jika $a - b$ adalah kelipatan n.

Untuk memantapkan pemahaman kita tentang definisi di atas, perhatikan contoh di bawah ini:

Contoh 1.

Periksa kebenaran pernyataan berikut ini:

(a) $3 \equiv 24 \pmod{7}$

(b) $-31 \equiv 11 \pmod{7}$

(c) $-15 \equiv -64 \pmod{7}$

(d) $13 \equiv -1 \pmod{7}$

(e) $23 \equiv 3 \pmod{7}$

Jawab

(a) $3 \equiv 24 \pmod{7}$ benar karena $3 - 24 = -21$ kelipatan dari 7

(b) $-31 \equiv 11 \pmod{7}$ benar karena $-31 - 11 = -42$ kelipatan dari 7

(c) $-15 \equiv -64 \pmod{7}$ benar karena $-15 + 64 = 49$ kelipatan dari 7

(d) $13 \equiv -1 \pmod{7}$ benar karena $13 + 1 = 14$ kelipatan dari 7

(e) $23 \equiv 3 \pmod{7}$ salah karena $23 - 3 = 20$ bukan kelipatan dari 7.

Jika $a - b$ bukan kelipatan dari n, atau ditulis $n \nmid (a - b)$, maka kita katakan bahwa a tidak kongruen b modulo n dan ditulis $a \not\equiv b \pmod{n}$. Sebagai contoh, $23 \not\equiv 3 \pmod{7}$.

Contoh 2

Tentukan semua bilangan bulat x sedemikian sehingga $x \equiv 1 \pmod{10}$.

Jawab.

$x \equiv 1 \pmod{10}$ jika dan hanya jika $x - 1 = 10k$ untuk setiap k bilangan bulat.

Jika k = 0, 1, 2, 3, … maka berturut-turut x = 1, 11, 21, 31, …

Begitu pula k = -1, -2, -3, … maka berturut-turut x = -9, -19, -29, …

Dua barisan tersebut digabungkan sehingga himpunan penyelesaian $x \equiv 1 \pmod{10}$ adalah $\{\ldots, -29, -19, -9, 1, 11, 21, 31, \ldots\}$.

Pada contoh 2 di atas, tampak bahwa stiap elemen pada $\{1, 11, 21, 31, \ldots\}$ mempunyai sisa 1 jika dibagi oleh 10. Secara umum dapat dikatakan bahwa dua buah bilangan cacah adalah kongruen modulo n jika dan hanya jika sisanya pada pembagian oleh m adalah sama.

Sifat1

Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan a, b, c, dan d bilangan bulat sebarang berlaku:

1. $a \equiv a \pmod{n}$
2. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $b \equiv a \pmod{n}$
3. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $b \equiv c \pmod{n}$ maka $a \equiv c \pmod{n}$
4. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$ maka $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
5. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$ maka $ac \equiv bd \pmod{n}$
6. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $a + c \equiv b + c \pmod{n}$
7. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $ac \equiv bc \pmod{n}$
8. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ untuk k bilangan bulat positif sebarang.

Bukti.

1. Untuk a bilangan bulat sebarang dan n suatu bilangan bulat positif berlaku $a - a = 0.n$.
   Dengan demikian, $a \equiv a \pmod{n}$.

1. $a \equiv b \pmod{n}$

   Ada k suatu bilangan bulat.

   Akibatnya, $b - a = -(a - b)$

   $= -(kn)$

   $= (-k)n$

   Karena –k juga suatu bilangan bulat, $b \equiv a \pmod{n}$

3. $a \equiv b \pmod{n}$ dan $b \equiv c \pmod{n}$

   Ada h dan k bilangan bulat sehingga

$a - b = hn$ dan $b - c = kn$.

Akibatnya, $a - c = (a - b) + (b - c)$

$= hn + kn$

$= (h + k)\, n$

Karena $h + k$ juga bilabgab bulat, $a \equiv c \pmod{n}$

‘4. $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$

Ada h dan k bilangan bulat sehingga

$a - b = hn$ dan $b - c = kn$

$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$

$= hn + kn$

$= (h + k)n$

Karena $h + k$ juga bilangan bulat, $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

5. $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$

Pandang $ac = (b + hn)(d + kn)$

$= bd + (bk + dh + hkn)n$

Karena $(bk + dh + hkn)$ bilangan bulat,

Ada h dan k bilangan bulat, $ac \equiv bd \pmod{n}$.

1. $a \equiv b \pmod{n}$

   Ada h bilangan bulat sehingga $a - b = hn$

   Karena $(a + c) - (b + c) = a - b = hn$, $a + c \equiv b + c \pmod{n}$.

2. $a \equiv b \pmod{n}$

   Ada h bilangan bulat sehingga $a - b = hn$

   $ac - bc = (a - b)c = hnc = (hc)n$

   Karena hc bilangan bulat, $ac \equiv bc \pmod{n}$.

3. Untuk buti ini kita gunakan induksi matematik.

   Untuk $k = 1$, berlaku $a \equiv b \pmod{n}$.

   Asumsikan $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ berlaku,

   harus ditunjukkan $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{n}$ juga berlaku.

   Dari (5), jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$ maka $ac \equiv bd \pmod{n}$.

   Kita ganti c oleh a^k dan d oleh b^k diperoleh

   $aa^k \equiv bb^k \pmod{n}$ atau

   $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{n}$

Contoh 3

Tentukan sisanya jika 3^{100} dibagi oleh 5.

Jawab.

Tampaknya kalkulator tidak dapat digunakan untuk menemukan jawaban atas masalah yang diajukan. Untuk itu kita gunakan cara lain untuk menyelesaikan masalah ini. Kita tahu bahwa suatu bilangan bulat positif dibagi oleh 5 mempunyai sisa 0, 1, 2, 3, atau 4. Penggunaan aritmatika modular akan membantu kita jika kita dapat menemukan bilangan bulat terkecil yang ekuvalen dengan pangkat dari 3, dan penggunaan sifat (7) dan (8) untuk membangun 3^{100} dan menemukan ekuivalensi mod 5.

Kita tahu bahwa $3^2 \equiv 4 \pmod 5$

Dengan demikian,

$$3^3 \equiv 3 . 4 \equiv 2 \pmod 5$$

$$3^4 \equiv 3 . 2 \equiv 1 \pmod 5$$

Dengan menggunakan sifat (8) kita peroleh,

$$(3^4)^{25} \equiv 1^{25} \pmod 5, \text{ atau}$$

$$3^{100} \equiv 1 \pmod 5.$$

Jadi,

3^{100} dibagi oleh 5 mempunayi sisa 1.

Sifat 2

Jika $ca \equiv cb \pmod n$ maka $a \equiv b \pmod{n/d}$ di mana $d = FPB(c , n)$.

Bukti.

Karena $ca \equiv cb \pmod n$,

$c(a – b) = ca – cb = kn$ untuk suatu bilangan bulat k.

Kita tahu bahwa $d = FPB(c , n)$, dengan demikian, ada bilangan bulat saling prima (*relative prime*) r dan s yang memenuhi $c = dr$, $n = ds$. Jika hasil ini kita substitusikan ke persamaan $c(a – b) = ca – cb = kn$ maka kita peroleh $r(a – b) = ks$.

Hasil ini menunjukkan $s \mid r(a – b)$, dan karena $FPB (r , s) = 1$, diperoleh $s \mid (a – b)$. Dengan kata lain,

$a \equiv b \pmod s$, atau $a \equiv b \pmod{n/d}$

Sifat 3

Jika $ca \equiv cb \pmod n$ dan $FPB(c , n) = 1$ maka $a \equiv b \pmod n$.

Sifat (3) ini hanya merupakan kasus khusus dari sifat (2).

Sifat 4

Jika $ca \equiv cb \pmod p$ dan $p \nmid c$, di mana p adalah bilangan prima maka $a \equiv b \pmod p$.

Bukti

Kondisi $p \nmid c$ dan p adalah bilangan prima ini mengakibatkan FPB(c , p) = 1.

Contoh 4

a. Perhatikan $33 \equiv 15 \pmod 9$, atau $3.11 \equiv 3.5 \pmod 9$.

   Karena FPB(3 , 9) = 1 mengakibatkan $11 \equiv 5 \pmod 9$.

b. Perhatikan $-35 \equiv 45 \pmod 8$, atau $5.(-7) \equiv 5.9 \pmod 8$.

   Karena 5 dan 8 bilangan bulat saling prima mengakibatkan $-7 \equiv 9 \pmod 8$.

Rangkuman

1. Misalkan n adalah suatu bilangan bulat positif, a dan b adalah suatu bilangan bulat. a dikatakan kongruen b modulo n, ditulis

   $$a \equiv b \pmod n$$

   jika dan hanya jika (a – b) adalah kelipatan n.

2. Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan a, b, c, dan d bilangan bulat sebarang berlaku:
   a. $a \equiv a \pmod n$
   b. Jika $a \equiv b \pmod n$ maka $b \equiv a \pmod n$
   c. Jika $a \equiv b \pmod n$ dan $b \equiv c \pmod n$ maka $a \equiv c \pmod n$
   d. Jika $a \equiv b \pmod n$ dan $c \equiv d \pmod n$ maka $a + c \equiv b + d \pmod n$
   e. Jika $a \equiv b \pmod n$ dan $c \equiv d \pmod n$ maka $ac \equiv bd \pmod n$
   f. Jika $a \equiv b \pmod n$ maka $a + c \equiv b + c \pmod n$
   g. Jika $a \equiv b \pmod n$ maka $ac \equiv bc \pmod n$
   h. Jika $a \equiv b \pmod n$ maka $a^k \equiv b^k \pmod n$ untuk k bilangan bulat positif sebarang.

2. Jika $ca \equiv cb \pmod n$ maka $a \equiv b \pmod{n/d}$ di mana d = FPB(c , n).

3. Jika $ca \equiv cb \pmod n$ dan FPB(c , n) = 1 maka $a \equiv b \pmod n$.

4. Jika $ca \equiv cb \pmod p$ dan $p \nmid c$, di mana p adalah bilangan prima maka $a \equiv b \pmod p$.

Uji Kompetensi

Berikan tanda silang (X) pada salah satu jawaban yang menurut anda benar.

1. $23 \equiv 3 \pmod 5$ karena
   a. 5 habis membagi dari 23 - 3

   b. 23 – 5 adalah kelipatan dari 3
   c. 3 dan 5 saling prima
   d. 23 dan 3 saling prima
2. 11 ≡ -1 (mod 2) karena
   a. 11 – 1 adalah kelipatan 2
   b. 11 + 1 adalah kelipatan 2
   c. 11 – 2 adalah kelipatan dari –1
   d. 2 habis membagi 11 – 1
3. Pernyataan yang benar adalah
   a. 23 ≡ 3 (mod 7)
   b. 23 ≡ 4 (mod 7)
   c. 23 ≡ 5 (mod 7)
   d. 23 ≡ 2 (mod 7)
4. Nilai n untuk 29 ≡ n (mod 5) adalah
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
5. Nilai n untuk 3498 ≡ n (mod 11) adalah
   a. 0
   b. 1
   c. 2
   d. 3
   e. 4
6. Nilai n untuk -23 ≡ n (mod 10) adalah
   a. –1
   b. –2
   c. –3
   d. –4
7. Pernyataan yang benar adalah
   a. Jika 9 + a ≡ 9 + b (mod n) maka a ≡ b (mod n) di mana a dan b bilangan bulat
   b. Jika 2a ≡ 2b (mod 7) maka a ≡ b (mod 7) di mana a dan b bilangan bulat
   c. Jika $a^k \equiv b^k$ (mod 5) maka a ≡ b (mod 5) di mana k bilangan bulat positif.

d. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $9 + a \equiv 9 + b \pmod{n}$ di mana a dan b bilangan bulat

8. Jika 14 September 2006 jatuh pada hari kamis maka 14 Oktober 2007 jatuh pada hari
   a. Rabu
   b. Kamis
   c. Jum'at
   d. Sabtu.
9. Jika tanggal 17 Agustus 2007 jatuh pada hari Jum'at maka 17 Agustus 2008 jatuh pada hari
   a. Kamis
   b. Jam'at
   c. Sabtu
   d. Minggu
10. Sisa dari $1! + 2! + 3! + \ldots + 100!$ dibagi oleh 12, di mana $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ adalah
   a. 6
   b. 7
   c. 8
   d. 9