Bilangan Berpangkat

Kita ingat kembali bahwa untuk bilangan-bilangan cacah a, m, dan n dengan $a \neq 0$, berlaku:

1. $a^m = a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\, a$ (sebanyak m faktor)
2. $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$
3. $a^0 = 1$, di mana $a \neq 0$

Notasi-notasi di atas dapat diperluas untuk nilai-nilai a bilangan rasional. Sebagai contoh, perhatikan bilangan-bilangan berikut:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}.\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

Demikian juga dengan

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

Secara umum, untuk setiap bilangan rasional tak nol, kita mempunyai

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

Pangkat (eksponen) dari suatu bilangan rasional tak nol dapat juga diperluas dengan bilangan bulat negatif. Perlu diingat bahwa setiap eksponen turun 1 maka bilangan pada ruas kanan dibagi oleh 10. Dengan demikian, kita dapat membuat pola sebagai berikut:

$10^3 = 10 \,.\, 10 \,.\, 10$

$10^2 = 10 \,.\, 10$

$10^1 = 10$

$10^0 = 1$

$10^{-1} = 1/10 = 1/10^1$

$10^{-2} = (1/10).\,(1/10) = 1/10^2$

$10^{-3} = (1/10^2).(1/10) = 1/10^3$

Jika pola ini diperluas maka kita dapat memprediksikan bahwa $10^{-n} = 1/10^n$

Secara umum, untuk sebarang bilangan a tak nol berlaku $a^{-n} = 1/a^n$

Penjelasan lain untuk definisi a^{-n} adalah sebagai berikut:

Jika sifat $a^m . a^n = a^{m+n}$ maka $a^{-n} . a^n = a^0 = 1$. Dengan demikian, a^{-n} adalah invers kali dari a^n, dan akibatnya $a^{-n} = 1/a^n$

Perhatikan apakah $a^m. a^n = a^{m+n}$ dapat diperluas untuk semua pangkat dari a di mana pangkatnya adalah bilangan bulat. Sebagai contoh, apakah benar $2^4.2^{-3} = 2^{4+-3} = 2^1$? Definisi 2^{-3} dan sifat-sifat pangkat tak negatif menjamin bahwa hal ini benar sebagaimana tampak dari yang berikut ini.

$2^4. 2^{-3} = (2^4)(1/2^3) = 2^4/2^3 = 2^1$

Begitu juga dengan

$2^{-4}.2^{-3} = 2^{-4+-3} = 2^{-7}$ benar, karena

$2^{-4}.2^{-3} = (1/2^4)(1/2^3) = 1/(2^4.2^3) =1/2^7 =2^{-7}$

Secara umum, dengan pangkat bilangan bulat, kita mempunyai sifat sebagai berikut.

Sifat 1

Untuksebarang bilangan rasional a tak nol dan sebarang bilangan bulat m dan n, berlaku $a^m. a^m = a^{m+n}$

Sifat-sifat lain dari perpangkatan dapat dikembangkan dengan menggunakan sifat-sifat bilangan rasional. Sebagai contoh,

$2^5/ 2^3 = (2^3 . 2^2) / 2^3 = 2^2 = 2^{5-3}$

$2^5/ 2^8 = 2^5 / (2^5 . 2^3) = 1 / 2^3 = 2^{-3} = 2^{5-8}$

Dengan pangkat bilangan bulat, kita mempunyai sifat berikut.

Sifat 2

Untuk sebarang bilangan rasional a tak nol dan untuk sebarang bilangan bulat m dan n, berlaku

$a^m / a^n = a^{m-n}$

Misalkan a bilangan rasional tak nol, m dan n bilangan bulat positif.

$(a^m)^n = a^m . a^m . a^m \dots a^m$ (sebanyak n faktor)

$= a^{m+m+m+\dots+m \text{ (sebanyak n suku)}}$

$= a^{nm}$

$= a^{mn}$

Dengan demikian,

$(a^m)^n = a^{mn}$

Sebagai contoh,

$(2^3)^4 \quad = 2^{3.4}$

$= 2^{12}$

Apakah sifat ini berlaku pula untuk pangkat yang berbentuk bilangan bulat negatif? Sebagai contoh,

a. $(2^3)^{-4} = 2^{(3)(-4)}$

$= 2^{-12}$

b. $(2^{-3})^4 = (1/2^3)^{\ 4}$

$= (1/2^3)\ (1/2^3)\ (1/2^3)\ (1/2^3)$

$= 1^4/(2^3)^4$

$= 1/2^{12}$

$= 2^{12}$

Sifat 3

Untuk sebarang bilangan rasional a tak nol dan sebarang bilangan bulat m dan n berlaku

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Menggunakan definisi dan sifat-sifat yang dikembangkan, kita dapat menurunkan sifat selanjutnya.

Sebagai contoh,

$(2/3)^4 \quad = 2/3 \ .\ 2/3 \ .\ 2/3 \ .\ 2/3$

$= (2\ .\ 2\ .\ 2.\ 2) / (3\ .\ 3.\ 3.\ 3)$

$= 2^4/3^4$

Contoh di atas dapat diperumumkan menjadi sifat berikut:

Sifat 4

Untuk sebarang bilangan rasional a/b tak nol dan sebarang bilangan bulat m, berlaku

$$(a/b)^m = a^m / b^m$$

Dari definisi pangkat negatif, sifat di atas, dan pembagian bilangan pecahan, kita memperoleh

$(a/b)^{-m} \ = 1/(a/b)^m$

$= 1/(a^m/b^m)$

$= b^m/a^m$

$= (b/a)^m$

Akibatnya,

$(a/b)^{-m} = (b/a)^m$

Sifat yang sama berlaku pula untuk perkalian. Sebagai contoh,

$(2 . 3)^{-3} = 1/(2.3)^3$

$= 1/(2^3.3^3)$

$= (1/2^3)\ (1/3^3)$

$= 2^{-3}.\ 3^{-3}$

Dan secara umum, jika a, b bilangan rasional dan m bilangan bulat maka

$(a . b)^m = a^m . b^m$.

Soal Latihan.

Tuliskan soal-soal berikut ini dalam bentuk yang paling sederhana, menggunakan pangkat positif pada akhir jawaban.

1. $16^2 . 8^{-3}$
2. $20^2 : 2^4$
3. $(3x)^3 + 2y^2 x^0 + 5y^2 + x^2. x$, di mana $x \neq 0$.
4. $(a^{-3} + b^{-3})^{-1}$

Jawab

1. $16^2 . 8^{-3} = (2^4)^2 . (2^3)^{-3}$
$= 2^8 . 2^{-9}$
$= 2^{-1}$
$= ½.$

2. $20^2/2^4 = (2^2. 5)^2 / 2^4$
$= (2^4. 5^2) / 2^4$
$= 5^2$

3. $(3x)^3 + 2y^2 x^0 + 5y^2 + x^2.x = 27x^3 + 2y^2 + 5y^2 + x^3$
$= (27x^3 + x^3) + (2y^2 + 5y^2)$
$= 28x^3 + 7y^2$

4. $(a^{-3} + b^{-3})^{-1} = (1/a^3 + 1/b^3)^{-1}$
$= ((b^3 + a^3) / a^3 b^3)^{-1}$

$= 1/((a^3 + b^3) / a^3b^3)$

$= a^3b^3 /(a^3 + b^3)$

Rangkuman

1. Jika m bilangan bulat positif maka berlaku, $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (sebanyak m faktor)
2. $a^0 = 1$, di mana $a \neq 0$.
3. $a^{-m} = 1/a^m$, di mana $a \neq 0$.
4. $a^m \cdot a^m = a^{m+n}$
5. $a^m / a^n = a^{m-n}$, di mana $a \neq 0$.
6. $(a^m)^n = a^{mn}$
7. $(a/b)^m = a^m \cdot b^m$, di mana $b \neq 0$.
8. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
9. $(a/b)^{-m} = (b/a)^m$, di mana $a \neq 0$ dan $b \neq 0$.

Uji Kompetensi

Lingkarilah salah satu jawaban yang menurut anda benar.

1. Bentuk paling sederhana dari a/a^{-1},di mana $a \neq 0$ adalah
   a. a^{-2}
   b. a
   c. 1
   d. a^2
2. Pernyataan berikut yang benar adalah
   a. $a^m \cdot b^n = (a\,b)^{m+n}$
   b. $a^m \cdot b^m = (a\,b)^{2m}$
   c. $a^{mn} = a^m\, a^n$
   d. $(a/b)^{-1} = b/a$
3. Nilai n untuk $2^n = 32$ adalah
   a. 2

b. 3
c. 4
d. 5

4. Nilai n untuk $2^n . 2^7 = 32$ adalah
   a. –2
   b. –1
   c. 1
   d. 2
5. Satu orang diperkirakan memiliki 25 trilion (25.10^{12}) sel darah merah. Rata-rata jari-jari setiap sel darah itu adalah 4.10^{-3} mm. Jika sel-sel darah merah tersebut disusun berjajar dalam sebuah garis lurus, maka panjang seluruh sel-sel darah itu adalah
   a. 2.10^5 km
   b. 2.10^5 m
   c. 2.10^5 cm
   d. 2.10^5 mm
6. Jika n adalah bilangan bulat maka nilai n untuk $3^{2n} \geq 27$ adalah
   a. n = 2
   b. n = 3
   c. $n \geq 3$
   d. $n \geq 2$
7. Pernyataan berikut yang benar adalah
   a. $4^{3000} < 3^{4000}$
   b. $32^{50} < 4^{100}$
   c. $(-3)^{-75} < (-27)^{-15}$
   d. $(4/3)^{10} < (5/4)^{10}$
8. Jika suku ke-n suatu barisan adalah $a_n = 3.2^{-n}$ maka suku pertama yang kurang dari 3/1000 adalah
   a. 3/1024
   b. 3/1032
   a. 3/1064
   b. 3/1082
9. Jika f(n) = ¾. 2^n maka nilai bilangan bulat terbesar n sehingga f(n) < 3/400 adalah
   a. -7

b. -6

c. 7

d. 6

10. Misalkan banyaknya bakteri pada suatu tempat tertentu diberikan sebagai fungsi dari waktu, $Q(t) = 10^{10} (6/5)^t$, di mana t adalah waktu dalam detik dan Q(t) adalah banyaknya bakteri pada saat t detik. Banyaknya bakteri setelah 2 detik adalah

a. Tepat $10^{10} (6/5)^2$

b. Lebih dari$10^{10} (6/5)^2$

c. Kurang dari $10^{10} (6/5)^2$

d. Kurang dari atau sama dengan $10^{10} (6/5)^2$.