Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Perlu diingat kembali bahwa suatu bilangan bulat a tidak nol adalah faktor dari suatu bilangan bulat b, ditulis $a \mid b$, jika ada bilangan bulat c sedemikian sehingga b = ac. Jika a adalah faktor dari b maka b dapat pula dibagi oleh –a. (b = ac berimplikasi pada b = (-a)(-c)). Jadi pembagi suatu bilangan bulat selalu terjadi dalam berpasangan. Untuk menentukan seluruh faktor dari suatu bilangan bulat, cukup dengan menemukan semua faktor positifnya kemudian menggabungkannya dengan faktor-faktor negatif yang berkorespondensi dengannya.

Selanjutnya kita akan membatasi membatasi pada pembagi-pembagi positif. Berikut ini beberapa sifat yang merupakan akibat dari definisi "faktor" di atas. Sekali lagi perlu diingat bahwa meskipun tidak dicantumkan, pembagi diasumsikan tidak nol.

Sifat 1

a. $a \mid 0$, $1 \mid a$, $a \mid a$.
b. $a \mid 1$ jika dan hanya jika $a = \pm 1$.
c. Jika $a \mid b$ dan $c \mid d$ maka $ac \mid bd$
d. Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$.
e. $a \mid b$ dan $b \mid a$ jika dan hanya jika $a = \pm b$.
f. Jika $a \mid b$ dan $b \neq 0$ maka $|a| \leq |b|$.
g. Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (bx + cy)$ untuk x dan y bilangan bulat sebarang.

Bukti.

Akan dibuktikan f dan g. Untuk bagian lain, anda diminta untuk mencoba membuktikan sendiri. Jika $a \mid b$ maka ada bilangan bulat c sedemikian sehingga b = ac; $b \neq 0$ berakibat $c \neq 0$. Dengan menggunakan nilai mutlak, kita peroleh $|b| = |ac| = |a|\,|c| \geq |a|$. Selanjutnya, untuk bagian g, adanya $a \mid b$ dan $a \mid c$ menjamin b = ar dan c = as untuk suatu r dan s bilangan bulat. Karena b = ar dan c = as, bx + cy dapat dinyatakan dalam bentuk arx + asy, atau bx + cy = arx + asy = a (rx + sy)

Karena rx + sy suatu bilangan bulat, hal ini menyatakan bahwa $a \mid (bx + cy)$.

Misalkan a bilangan bulat sebarang. Suatu bilangan bulat d disebut faktor sekutu a dan b jika $d \mid a$ dan $d \mid b$. Karena 1 adalah faktor setiap bilangan bulat, 1 adalah faktor sekutu a dan b. Dengan demikian himpunan faktor sekutu positifnya tidak kosong. Setiap bilangan bulat tidak nol dapat membagi nol, sedemikian sehingga a = b = 0 maka setiap bilangan bulat merupakan faktor sekutu a dan b. Dalam hal ini, banyaknya faktor sekutu a dan b adalah tak hingga. Tetapi, jika paling sedikit satu dari a atau b tidak nol maka banyaknya faktor sekutu positifnya terhingga dan diantara faktor-faktor sekutu itu ada faktor yang terbesar. Faktor ini disebut faktor persekutuan terbesar dari a dan b dan disingkat FPB (a,b).

Definisi

Misalkan a dan b bilangan-bilangan bulat, dengan paling seditit satu diantaranya tidak nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b, ditulis FPB(a,b) adalah sebuah bilangan bulat positif yang memenuhi:

a. $d \mid a$ dan $d \mid b$.

b. Jika $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \leq d$.

Sebagai ilustrasi, kita perhatikan bahwa faktor positif dari -12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 12, dan faktor positif dari 30 adalah 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Dengan demikian, faktor persekutuan positifnya (selanjutnya kita sebut dengan faktor persekutuan) adalah 1, 2, 3, 6. Karena 6 adalah bulangan terbesar dari bilangan-bilangan bulat itu, FPB(-12,30) = 6. Dengan cara yang sama kita dapat menunjukkan bahwa

$$\text{FPB}(-5,5) = 5 \qquad \text{FPB}(8,17) = 1 \qquad \text{FPB}(-8,-36) = 4.$$

Sifat berikut mengindikasikan bahwa FPB(a,b) dapat direpresentasikan sebagai kombinasi linear a dan b (dinyatakan dalam bentuk ax + by, di mana x dan y bilangan-bilangan bulat). Sebagai ilustrasi, kita perhatikan bahwa

$$\text{FPB}(-12,30) = 6 = (-12)2 + 30.1, \text{ atau}$$

$$\text{FPB}(-8,-36) = 4 = (-8)4 + (-36)(-1).$$

Sifat 1

Jika a dan b bilangan-bilangan bulat dan keduanya tidak nol maka ada bilangan-bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga

$$\text{FPB}(a,b) = ax + by$$

Bukti.

Perhatikan himpunan S adalah himpunan semua kombinasi linear positif dari a dan b.

$$S = \{au + bv \mid au + bv > 0;\ u, v \text{ bilangan-bilangan bulat}\}$$

Pertama yang harus diingat adalah S tidak kosong. Sebagai contoh, jika $a \neq 0$, maka bilangan bulat $|a| = a.u + b.0$ di S, di mana kita pilih u = 1 atau u = -1 sesuai dengan a posiotif atau a negarif. Menurut prinsip terurut sempurna (*well ordering principle*), S memuat sebuah unsur terkecil, sebut d. Dengan demikian, ada x dan y sehingga d = ax + by. Kita klaim bahwa d = FPB(a,b).

Dengan menggunakan algoritma pembagian, kita dapat memperoleh q dan r sedemikian sehingga a = qd + r, di mana $0 \leq r < d$. r dapat kita tulis dalam bentuk

$$a = a - qd = a - q(ax + by)$$
$$= a(1 - qx) + b(-qy)$$

Jika r = 0 maka representasi ini memberikan imlikasi bahwa r adalah anggota S, kontradiksi dengan fakta bahwa d adalah bilangan bulat terkecil di dalam S (ingat r < d). Dengan demikian, r = 0 dan a = qd, atau ekuivalen dengan $d \mid a$. Dengan penalaran yang serupa, $d \mid b$. Akibatnya d adalah faktor sekutu dari a dan b.

Sekarang jika c suatu faktor sekutu positif sebarang dari bilangan bulat a dan b maka menurut sifat keterbagian $c \mid (ax + by)$; yang berarti $c \mid d$. Dengan menggunakan sifat keterbagian, $c = |c| \leq |d| = d$, d lebih besar dari setiap faktor sekutu pisitif dari a dan b. Jadi d = FPB(a,b).

Dari bukti sifat 1, tampak bahwa FPB dari a dan b dapat dinyatakan sebagai bilangan positif terkecil dari bentuk ax + by. Jika a = 6 dan b = 15, maka himpunan S menjadi

$$S = \{6(-2) + 15.1, 6(-1) + 15.1, 6.1 + 15.0, \ldots\}$$
$$= \{3, 9, 6, \ldots\}$$

Kita mengamati bahwa 3 adalah bilangan bulat terkecil di dalam S. Jadi 3 = FPB (6,15).

Sifat 2

Jika a dan b bilangan-bilangan bulat tidak nol maka himpunan

$$T = \{ax + by \mid x, y \text{ bilangan-bilangan bulat}\}$$

Adalah himpunan semua kelipatan d = FPB(a,b)

Bukti.

Karena $d \mid a$ dan $d \mid b$, kita mengetahui bahwa $d \mid (ax + by)$ untuk setiap x, y bilangan bulat. Dengan demikian, setiap anggota T adalah kelipatan dari d. d dapat ditulis sebagai $d = ax_0 + by_0$ untuk suatu x_0 dan y_0 bilangan bulat, sedemikian sehingga sebarang kelipatan d adalah berbentuk

$$nd = n(ax_0 + by_0) = a(nx_0) + b(ny_0)$$

Dengan demikian, nd adalah kombinasi dari a dan b; dan dengan definisi, terletak di T.

Dapat terjadi bahwa pasangan bilangan bulat a dan b hanya mempunyai faktor sekutu 1 dan –1. Dengan demikian FPB(a, b) = 1. Sebagai contoh, FPB(2,5) = FPB(-9,16) = 1. Situasi ini cukup sering terjadi. Untuk itu kita mempunyai definisi berkaitan dengan masalah ini.

Definisi

Dua bilangan bulat a dan b keduanya tidak nol disebut saling prima jika FPB(a,b) = 1.

Sifat berikut ini berkaitan dengan bilangan-bilangan bulat saling prima dan kombinasi linear.

Sifat 3

Misalkan a dan b bilangan-bilangan bulat, keduanya tidak nol. a dan b adalah saling prima jika dan hanya jika ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga 1 = ax + by.

Bukti.

Jika a dan b saling prima maka FPB (a,b) = 1. Sifat 1 menjamin bahwa ada bilangan bulat x dan y yang memenuhi 1 = ax + by. Konversnya, Misalkan 1 = ax + by untuk suatu x dan y, dan d = FPB(a,b). Karena d $\mid$a dan d $\mid$b, d $\mid$ (ax + by), atau d $\mid$1.

Sifat 4

Jika FPB(a,b) = d maka FPB(a/d , b/d) = 1

Bukti.

Perlu kita ketahui bahwa a/d dan b/ d adalah bilangan-bilangan bulat (mengapa?)

Karena FPB(a,b) = d, ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga d = ax + by. Dengan membagi setiap ruas oleh d, diperoleh,

$$1 = (a/d)x + (b/d)y$$

Karena a/d dan b/d bilangan-bilangan bulat, sifat 4 diatas sah. Kesimpulannya adalah bahwa a/d dan b/d adalah saling prima.

Sebagai ilustrasi, FPB(-12,30) = 6 dan FPB (-12/6, 30/6) = FPB(-2,5) = 1 adalah benar.

Sifat 5

Jika a$\mid$c dan a$\mid$c, dengan FPB(a,b) = 1 maka ab$\mid$c.

Bukti.

Karena a$\mid$c dan a$\mid$c, ada bilangan-bilangan bulat r dan s sedemikian sehingga c =ar = bs. FPB(a,b) = 1 mengakibatkan 1 = ax + by untuk suatu x dan y bilangan bulat. Jika setiap ruas pada persamaan terakhir dikalikan dengan c maka

$$c = c.1 = c(ax + by) = acx + bcy = a(bs)x + b(ar)y = ab(sx + ry).$$

Dengan demikian,

$$c = ab(sx + by).$$

Dengan kata lain,

$$ab \mid c.$$

Sifat 6 (Lema Euclide)

Jika a$\mid$bc, dengan FPB(a,b) = 1 maka a$\mid$c.

Bukti

Kita mulai dengan suatu sifat, $1 = ax + by$, untuk asuatu x dan y bilangan bulat. Kalikan kedua ruas persamaan ini dengan c dan kita peroleh

$$c = 1.c = (ax + by)c = acx + bcy$$

Karena $a \mid ac$ dan $a \mid bc$, akibatnya $a \mid (acx + bcy)$. Dengan demikian $a \mid c$.

Jika a dan b bukan saling prima, maka konklusi sifat 6 di atas bisa jadi gagal. Sebagai ilustrasi, $12 \mid 9.8$, tetapi $12 \nmid 9$ dan $12 \nmid 8$.

Sifat 7

Misalkan a, b bilangan-bilangan bulat, keduanya tidak nol dan d bilangan bulat positif.

d = FPB(a,b) jika dan hanya jika

(i) $d \mid a$ dan $d \mid b$.

(ii) Jika $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \mid d$.

Bukti.

Misalkan d = FPB(a,b). Akibatnya $d \mid a$ dan $d \mid b$. ((i) terbukti).

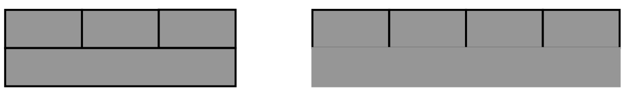
Selanjutnya, d juga dapat dinyatakan dalam bentuk $d = ax + by$ untuk suatu bilangan bulat x dan y. Jadi jika $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \mid (ax + by)$, atau $c \mid d$. ((ii) terbukti).

Konversnya, misal d sebarang bilangan bulat positif yang memenuhi kondisi yang ada. Diberikan faktor persekutuan a dan b yaitu c. Kita memperoleh $c \mid d$ dari hipotesis (ii). Implikasinya adalah $c \geq d$, akibatnya d adalah faktor persekutuan terbesar dari a dan b.

Pada pembelajaran di sekolah, biasanya bilangan yang digunakan adalah bilangan cacah. Dengan demikian, faktor persekutuan terbesar (FPB) dari dua bilangan cacah adalah pembagi terbesar atau faktor terbesar yang dipunyai oleh dua bilangan tersebut dan bernilai sama. Kita dapat membangun sebuah model dari dua atau lebih bilangan dengan menggunakan batang-batang *cuisenaire* untuk menentukan FPB dari bilangan-bilangan itu. Sebagai contoh, perhatikan batang 6 dan batang 8 pada gambar berikut:

Batang 6 Batang 8

Batang-batang 2 Batang-batang 2



Batang 6 Batang 8

Utuk menentukan FPB dari 6 dan 8, kita harus menentukan batang terpanjang sedemikian sehingga kita dapat menggunakan perkalian-perkalian dari batang itu untuk membangun batang 6 dan batang 8. Batang–batang 1 dan batang-batang 2 dapat digunakan untuk membangun batang 6 dan bnatang 8. Batang-batang 3 dapat membangun batang 6 tetapi tidak dapat membangun batang 8; batang-batang 4 dapat membangun batang 8 tetapi tidak dapat membangun batang 6. Batang-batang 5 tidak dapat membangun batang 6 dan batang 8. Dengan demikian, FPB (6 , 8) = 2.

Selanjutnya disajikan beberapa cara atau metode untuk menentukan FPB(a, b), yaitu metode irisan himpunan, metode faktorisasdi prima, dan algoritma Euclide.

1. Metode Irisan Himpunan.

Di dalam metode irisan himpunan, kita mendaftar semua bilangan dari himpunan pembagi positif dari dua bilangan, kemudian kita menentukan himpunan semua pembagi sekutu, dan akhirnya kita memilih unsur terbesar di dalam himpunan itu.

Contoh 1.

Tentukan FPB dari 20 dan 32.

Jawab.

Misalkan kita lambangkan pembagi-pembagi positif 20 dan 32 masing-masing dengan F20 dan F32.

$$F20 = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$F32 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$$

Himpunan pembagi sekutu atau faktor sekutu dari 20 dan 32 di atas adalah

$$F20 \cap F32 = \{1, 2, 4\}$$

Karena bilangan terbesar dalam himpunan pembagi sekutu tersebut adalah 4,

FPB dari 20 dan 32 adalah 4, ditulis FPB (20 , 32) = 4.

Contoh 2.

Tentukan FPB dari 50, 45, dan 40.

Jawab.

Misalkan kita lambangkan pembagi-pembagi positif dari 50, 45, dan 40 masing-masing dengan F50, F45, dan F40.

$$F50 = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$$

$$F45 = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

$$F40 = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$$

Himpunan pembagi sekutu atau faktor sekutu dari 50, 45, dan 40 di atas adalah

$$F50 \cap F45 \cap F40 = \{1, 2, 5\}$$

Karena bilangan terbesar dalam himpunan pembagi sekutu tersebut adalah 5,
FPB dari 50, 45, dan 40 adalah 5,
ditulis FPB (50 , 45 , 40) = 5.

2. Metode Faktorisasi Prima.

Metode irisan himpunan tampaknya memerlukan waktu yang cukup lama untuk menyelesaikan masalah FPB jika bilangan-bilangannya mempunyai banyak faktor. Metode lain, yang mungkin lebih efisien adalah metode faktorisasi prima. Prosedur untuk menentukan FPB dari dua atau lebih bilangan dengan menggunakan metode faktorisasi prima ini dapat dinyatakan sebagai berikut: Untuk menentukan FPB dari dua buah bilangan, pertama kita tentukan faktorisasi prima dari dua buah bilangan itu, kemudian ambil faktor-faktor sekutu primanya; FPB adalah hasil kali faktor-faktor sekutu itu, di mana yang dipilih adalah bilangan dengan pangkat terrendah antara hasil faktorisasi prima pada bilangan pertama dan pada bilangan kedua. Sebagai ilustrasi penggunaan metode ini, perhatikan bagaimana mencari FPB (180, 168), pertama-tama kita tulis,

$$\begin{aligned} 180 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\ &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 168 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \\ &= 2^3 \times 3 \times 7 \end{aligned}$$

Kita lihat bahwa 180 dan 168 mempunyai dua faktor sekutu prima, yaitu 2 dan 3. Faktor-faktor sekutu prima tersebut membagi 180 dan 168. Pembagi-pembagi sekutu yang masih mungkin adalah 1, 2, 2^2, 3, 2 x 3, dan 2^2 x 3. Dengan demikian, faktor persekutuan terbesar dari 180 dan 168 adalah 2^2 x 3.

Bagaimana Jika kita menggunakan metode faktorisasi prima tetapi kedua bilangan yang akan dicari FPB-nya itu tidak mempunyai faktor-faktor sekutu prima? Sebagai contoh, kita akan menentukan FPB (4, 9). Kita tahu bahwa 4 dan 9 tidak mempunyai faktor-faktor sekutu prima. Akibatnya 1 adalah pembagi sekutu yang tunggal, dengan demikian FPB (4, 9) =1. Bilangan-bilangan seperti 4 dan 9 dengan FPBnya 1 disebut saling prima *(relative prime)*.

3. Algoritma Euclide

Algoritma Euclide dapat dijelaskan sebagai berikut: Misalkan a dan b dua buah bilangan bulat. Karena FPB($|a|$, $|b|$)= FPB(a, b), tidak salah untuk mengasumsikan bahwa $a \geq b > 0$. Langkah pertama adalah menggunakan algoritma pembagian a dan b untuk memperoleh

$$a = q_1 b + r_1 \quad 0 \leq r_1 < b$$

Jika yang terjadi $r_1 = 0$ maka $b | a$ dan FPB(a, b) = b. Jika $r_1 \neq 0$, bagilah b oleh r_1 untuk memperoleh bilangan bulat q_2 dan r_2 yang memenuhi

$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

Jika yang terjadi $r_2 = 0$ maka kita berhenti sampai di sini. Jika $r_1 \neq 0$ teruskan langkah-langkah seperti sebelumnya, sehingga diperoleh

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

Proses pembagian ini diteruskan sampai diperoleh sisa nol, katakanlah pada langkah ke (n + 1) di mana r_{n-1} dibagi oleh r_n. Hasilnya adalah sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1 & 0 &\leq r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2 & 0 &\leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 & 0 &\leq r_3 < r_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n & 0 &\leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0
\end{aligned}$$

Kita menyatakan bahwa r_n , sisa tidak nol terakhir yang muncul, sama dengan FPB(a, b). Bukti kita didasarkan pada sifat berikut.

Sifat 8

Jika a = qb + r maka FPB(a, b) = FPB(b, r)

Bukti.

Jika d = FPB(a, b) maka $d | a$ dan $d | b$ dan implikasinya $d | (a - qb)$, atau $d | r$. Dengan demikian, d adalah faktor persekutuan b dan r. Di sisi lain, c adalah sebarang faktor sekutu b dan r maka $c | (bq + r)$, dan $c | a$. Hal ini membuat c faktor sekutu dari a dan b, sehingga $c \leq d$. Dari alasan ini dan definisi FPB(b, r) diperoleh d = FPB(b, r).

Dengan menggunakan sifat ini, kita dapat secara sederhana menyelesaikan masalah FPB(a, b) ini dengan cara sebagai berikut:

$$\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(b, r_1) = \ldots = \text{FPB}(r_{n-1}, r_n) = \text{FPB}(r_n, 0) = r.$$

Sebagai ilustrasi, perhatikan FPB(12378, 3054). Dengan algoritma pembagian, kita akan memperoleh persamaan-persamaan:

$$12378 = 4.\ 3054 + 162$$
$$3054 = 18.\ 162 + 138$$
$$162 = 1.\ 138 + 24$$
$$138 = 5.\ 24 + 18$$
$$24 = 1.\ 18 + 6$$
$$18 = 3.\ 6 + 0$$

Pada diskusi kita sebelumnya menyatakan pada kita bahwa sisa tak nol terakhior yang muncul di dalam persamaan-persamaan ini, bilangan bulat 6, faktor persekutuan terbesar dari 12378 dan 3054.

$$6 = \text{FPB}(12378, 3054)$$

Untuk menampilkan 6 sebagai kombinasi linear dari 12378 dan 3054, kita mulai urutan ke dua terakhir, sebagimana yang ditampilkan berikut ini.

$$\begin{aligned} 6 &= 24 - 18 \\ &= 24 - (138 - 5.\ 24) \\ &= 6.\ 24 - 138 \\ &= 6(162 - 138) - 138 \\ &= 6.\ 162 - 7.\ 138 \\ &= 6.\ 162 - 7(3054 - 18.\ 162) \\ &= 132.\ 162 - 7.3054 \\ &= 132(12378 - 4.\ 3054) - 7.\ 3054 \\ &= 132.\ 12378 + (-535)3054 \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$6 = \text{FPB}(12378, 3054) = 12378x + 3054y$, di mana $x = 132$ dan $y = -535$. Perlu diingat bahwa hal ini bukan satu-satunya cara untuk menyatakan bilangan bulat 6 sebagai kombinasi linear dari 12378 dan 3054; diantara kemungkinan-kemungkinan lain, kita dapat menambahkan atau mengurangi 3054 . 12378 untuk memperoleh

$$\begin{aligned} 6 &= (132 + 3054).12378 + (-535 - 12378).3054 \\ &= 3186 \ .\ 12378 + (-12913).\ 3054 \end{aligned}$$

Sifat 9

Jika $k > 0$ maka $\text{FPB}(ka, kb) = k\ \text{FPB}(a, b)$

Bukti.

Jika setiap persamaan yang muncul di dalam algoritma Euclide untuk a dan b dikalikan oleh k maka akan kita peroleh

$ak = q_1(bk) + r_1k \qquad 0 \le r_1 < b$

$bk = q_2(r_1k) + r_2k \qquad 0 \le r_2 < r_1$

$r_1k = q_3(r_2k) + r_3k \qquad 0 \le r_3 < r_2$

.

.

.

$r_{n-2}k = q_n(r_{n-1}k) + r_nk \qquad 0 \le r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = q_{n+1}(r_nk) + 0$

Hal ini tampak jelas bahwa algoritma Euclide digunakan untuk bilangan-bilangan bulat ak dan bk, sedemikian sehingga faktor persekutuan terbesarnya adalah sisa tak nol terakhir r_nk; yang berarti

FPB(ka, kb) = r_nk = k FPB(a, b).

Sifat 10

Untuk sebarang $k \neq 0$ berlaku FPB(ka, kb) = $|k|$ FPB(a, b)

Bukti.

Kita cukup memperhatikan kasus $k < 0$. Kemudian $-k = |k| > 0$, dan dengan sifat 9 kita peroleh

FPB(ak, bk) = FPB(-ak, -bk)

= FPB(a$|k|$, b$|k|$)

= $|k|$ FPB(a, b)

Sebagai ilustrasi sifat 9, kita lihat bahwa

FPB(12, 30) = 3 FPB(4, 10) = 3. 2 FPB(2, 5) = 6. 1 = 6.

Contoh 1

Tenentukan FPB (676 , 221).

Jawab.

Jika kita dapat menentukan dua buah bilangan yang lebih kecil 676 dan 221 tetapi mempunyai FPB sama dengan FPB (676 , 221) maka pekerjaan kita akan lebih mudah. Kita tahu bahwa untuk setiap pembagi 676 dan 221 adalah juga pembagi 676 – 221 dan 221. Akibatnya,

FPB (676 , 221) = FPB (676 – 221 , 221).

Proses ini dapat diteruskan sehingga diperoleh, FPB (676 , 221) = FPB (676 – 3 x 221 , 221).

= FPB (13 , 221).

Kita juga mengetahui bahwa untuk setiap pembagi 13 dan 221 adalah juga pembagi dari 221 – 13 dan 13.

Akibatnya,

FPB (13 , 221).= FPB (13 , 221 – 13)

Proses ini dapat diteruskan sehingga diperoleh,

FPB (13 , 221).= FPB (13 , 221 – 17 x 13)

= FPB (13 , 0)

= 13

Dengan demikian FPB (676 , 221) = 13.

Contoh 2.

Gunakan algoritma Euclide untuk menentukan FPB (10764 , 2300).

Jawab.

Karena 10764 dibagi 2300 adalah 4 sisa 1564,

FPB (10764 , 2300) = FPB (2300 , 1564).

Karena 2300 dibagi 1564 adalah 1 sisa 736,

FPB (2300 , 1564) = FPB (1564 , 736).

Karena 1564 dibagi 736 adalah 2 sisa 92,

FPB (1564 , 736) = FPB (736 , 92).

Karena 736 dibagi 92 adalah 8 sisa 0,

FPB (736 , 92) = FPB (92 , 0).

Dengan demikian,

FPB (10764 , 2300) = 92.

Rangkuman

1. Misalkan a dan b bilangan-bilangan bulat, dengan paling seditit satu diantaranya tidak nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b, ditulis FPB(a,b) adalah sebuah bilangan bulat positif yang memenuhi:
   a. $d \mid a$ dan $d \mid b$.
   b. Jika $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \leq d$.
2. Jika a dan b bilangan-bilangan bulat dan keduanya tidak nol maka ada bilangan-bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga FPB(a,b) = ax + by.

3. Jika a dan b bilangan-bilangan bulat tidak nol maka himpunan

   $T = \{ax + by \mid x, y \text{ bilangan-bilangan bulat}\}$

   adalah himpunan semua kelipatan d = FPB(a,b).
4. Misalkan a dan b bilangan-bilangan bulat, $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ adalah saling prima jika dan hanya jika ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga 1 = ax + by.
5. Jika FPB(a,b) = d maka FPB(a/d , b/d) = 1
6. Jika $a \mid c$ dan $a \mid c$, dengan FPB(a,b) = 1 maka $ab \mid c$.
7. Jika $a \mid bc$, dengan FPB(a,b) = 1 maka $a \mid c$.
8. Misalkan a, b bilangan-bilangan bulat, keduanya tidak nol dan d bilangan bulat positif.

   d = FPB(a,b) jika dan hanya jika

   (i) $d \mid a$ dan $d \mid b$.

   (ii) Jika $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \mid d$.
9. Beberapa metode untuk menentukan FPB(a, b) adalah metode irisan himpunan, metode faktorisasdi prima, dan algoritma Euclide.
10. Jika a = qb + r maka FPB(a, b) = FPB(b, r).
11. Jika k > 0 maka FPB(ka, kb) = k FPB(a, b).
12. Untuk sebarang $k \neq 0$ berlaku FPB(ka, kb) = $|k|$ FPB(a, b).

Uji Kompetensi

Lingkarilah salah satu jawaban yang menurut anda benar.

1. FPB (18 , 10) =

   a. 2

   b. 3

   c. 4

   d. 5
2. FPB (8 , 24 , 52) =

   a. 12

   b. 8

   c. 6

   d. 4
3. FPB (2364 , 10134) =

   a. 3378

   b. 224

c. 127

d. 349

4. FPB (625 , 750 , 1000) =

a. 25

b. 50

c. 75

d. 125

5. Jika n himpunan bilangan asli, $1 \leq n \leq 15$, dan FPB (15 , n) = 1 maka n =

a. $\{1 , 2 , 3 , \ldots, 15\}$

b. $\{1 , 3 , 5, \ldots, 15\}$

c. $\{2 , 4 , 6 , \ldots, 14\}$

d. $\{1 , 2 , 4 , 7 , 8 , 11 , 13 , 14\}$

6. Amir mempunyai 144 buah jeruk dan 120 buah salak. Jika ia ingin membagikan buah-buah itu kepada sebayak-banyaknya orang dan setiap orang memperoleh bagian sama, berapa banyak orang yang akan memperoleh buah-buah itu?

a. 4

b. 8

c. 12

d. 24

7. Jika FPB (m , n) = 1 maka

a. m dan n ganjil.

b. m atau n ganjil.

c. m dan n prima.

d. pilihan jawaban a, b, dan c salah.

8. Jika FPB (m , n) = 2 maka

a. m dan n genap.

b. m atau n genap.

c. m atau n prima

d. pilihan jawaban a, b, dan c salah.

9. Misalkan m dan n bilangan asli. Jika FPB (m , n) = p dan $m < n$ maka

a. $p < n$

b. $p \leq n$

c. $p < m$

d. $p \leq m$

10. Jika FPB (m , n) = m maka

a. $m = n$

b. $m \neq n$

c. $m < n$

d. n = km untuk suatu k bilangan asli.

11. Jika $a \mid b$ maka FPB (a, b) =

a. a

b. b

c. $|a|$

d. $|b|$

12. Jika FPB(a, b) = 1 maka FPB(a + b, a – b) =

a. 1 atau 2

b. 1 atau 3

c. 2 atau 3

d. 1

13. Jika FPB(a, b) = 1 maka FPB(2a + b, a +2b) =

a. 1 atau 2

b. 1 atau 3

c. 2 atau 3

d. 1

14. Jika FPB(46, 72) = 56x + 72y maka nilai x dan y berturut-turut adalah

a. 4 dan 3

b. 4 dan 1

c. 4 dan –1

d. 4 dan –3

15. Jika FPB(24, 138) = ax + by maka nilai x dan y berturut-turut adalah

a. 6 dan 3

b. 6 dan 1

c. –1 dan 6

d. 6 dan –1