Bahan Kuliah Struktur Aljabar I:

1. TEOREMA FUNDAMENTAL HOMOMORPHISMA (TEOREMA ISOMORPHISMA PERTAMA):

Diberikan G dan H grup

Jika f : G $\longrightarrow$ H homorphisma grup dan

K : Kernel f

maka $\frac{G}{K} \cong \mathrm{Im}(f) \subseteq H$

BUKTI:

Perhatikan diagram berikut:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & H \\ \frac{G}{K} \arrow[urr, "\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

Didefinisikan relasi $\varphi : \frac{G}{K} \to \mathrm{Im}\, f \subseteq H$

dengan $\varphi(Kg) = f(g)$

i) φ suatu pemetaan, sebab:

Jika $Kg_1 = Kg_2$ maka $g_2 g_1^{-1} \in K$

$K = Kg_2 g_1^{-1}$

$f(g_2 g_1^{-1}) = f(g_2)\, f(g_1^{-1}) = f(g_2)\, f(g_1)^{-1} = e^* \in H$

ii) φ suatu homomorphisma grup, sebab:

$$\begin{aligned}\varphi((Kg_1)(K g_2)) &= \varphi(Kg_1 g_2)\\ &= f(g_1 g_2)\\ &= f(g_2)\, f(g_1)\\ &= \varphi(Kg_1)\, \varphi(K g_2)\end{aligned}$$

iii) φ surjektif (onto), sebab:

Jika $g' \in \mathrm{Im}\, f$ sembarang, maka $g' = f(g)$ untuk suatu $g \in G$ sehingga $g' \in \mathrm{Im}\, f$ mempunyai kawan $kg \in \frac{G}{K} \ni \varphi(Kg) = f(g) = g'$

iv) φ injektif (1-1), sebab:

Ambil $Kg_1, Kg_2 \in \frac{G}{K}$ dengan $\varphi(Kg_1) = \varphi(K g_2)$

maka diperoleh:

$$f(g_1) = f(g_2)$$

$$f(g_1)\, f(g_2)^{-1} = e^*$$

$$f(g_1 g_2^{-1}) = e^*$$

Jadi $g_1 = g_2$

Dari hasil i) s.d. iv) terbukti bahwa

$$\frac{G}{K} \cong \mathrm{Im}(f) \subseteq H$$

Cara lain untuk membuktikan φ injektif , sbb:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\varphi) &= \{Kg \in \tfrac{G}{K} \mid \varphi(Kg) = e^{*} \in H\} \\
&= \{Kg \in \tfrac{G}{K} \mid f(g) = e^{*} \in H\} \\
&= \{Kg \in \tfrac{G}{K} \mid g \in \mathrm{Ker}(f) \ \} \\
&= K \text{ (K adalah elemen satuan dlm } \tfrac{G}{K}\text{)}
\end{aligned}
$$

2. TEOREMA ISOMORPHISMA KEDUA:

Jika G grup dan K subgroup dari G

H subgroup normal dari G

Maka $\dfrac{K}{H \cap K} \cong \dfrac{HK}{H}$

BUKTI:

Didefinisikan relasi : $f : K \longrightarrow \dfrac{HK}{H}$

dengan $f(k) = Hk$

(berarti $\mathrm{Ker}(f) = H$ dan $\mathrm{Im}(f) = \dfrac{HK}{H}$)

i) f suatu pemetaan, sebab

Ambil $k_1, k_2 \in K$ dengan

$$
\begin{aligned}
k_1 &= k_2 \\
Hk_1 &= Hk_2 \\
f(k_1) &= f(k_2)
\end{aligned}
$$

ii) f homomorphisma, sebab

$f(k_1 k_2) = H k_1 k_2 = Hk_1 \; Hk_2 = f(k_1) f(k_2)$

iii) f surjektif (onto), sebab

Ambil $Hx \in \frac{HK}{H}$, maka x = hk untuk suatu

$h \in H$ dan $k \in K$

jadi Hx = H(hk) = (Hh) (Hk)=Hk = f(k)

iv)f injektif (1-1), sebab

Ambil $k \in$ Ker(f) maka f(k) = H

Hk = H

Ini berarti bahwa $k \in H$

$$\left.\begin{array}{l} k \in \ker(f) \subseteq K \\ k \in H \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{berarti } k \in H \cap K \\ \text{sedangkan } k \in \ker(f) \ldots(*) \end{array}$$

dari (*) disimpulkan bahwa ker(f) = $H \cap K$

menurut pembuktian di atas dan diperoleh juga bahwa ker(f) = $H \cap K$ dan Im(f) = $\frac{HK}{H}$

menurut teorema isomorphisma pertama bahwa :

$$\frac{K}{Ker(f)} \cong \text{Im}(f) \text{ atau } \frac{K}{H \cap K} \cong \frac{HK}{H}$$

TEOREMA ISOMORPHISMA KETIGA:

Jika G grup dan H , K subgroup normal dari G
$H \subseteq K$

Maka $\dfrac{G/H}{K/H} \cong \dfrac{G}{K}$ **atau** $\dfrac{G}{K} \cong \dfrac{G/H}{K/H}$

BUKTI:

Didefinisikan relasi : ϕ: $\dfrac{G}{H} \longrightarrow \dfrac{G}{K}$

dengan ϕ (Ha) = Ka, a $\in$ G

i) ϕ suatu pemetaan, sebab

Ambil sembarang Ha, Hb $\in \dfrac{G}{H}$ s.d.s Ha = Hb

$Hab^{-1} = H$…(*)

sehingga diperoleh $ab^{-1} \in H \subseteq K$, berarti $ab^{-1} \in K$ sehingga bentuk (*) menjadi Ka = Kb, sehingga diperoleh bahwa ϕ (Ha) = ϕ (Hb)

ii) ϕ homomorphisma, sebab

ϕ(Ha Hb)=ϕ(Hab)=K ab = Ka Kb = ϕ(Ha)ϕ (Hb)

iii) ϕ surjektif (onto), sebab

$$\mathrm{Im}(\phi) = \{\ Ka \mid a \in G\} = \frac{G}{K}$$

iv) ϕ injektif (1-1), sebab

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{\ Ha \in \frac{G}{H} \mid \phi(Ha) = K \in \frac{G}{K}\}$$

$$= \{\ Ha \in \frac{G}{H} \mid Ka = K \in \frac{G}{K}\}$$

$$= \{\ Ha \in \frac{G}{H} \mid a \in K\ \}$$

$$= \frac{K}{H}$$

menurut teorema isomorphisma pertama bahwa :

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{Ker(f)}} \cong \mathrm{Im(f\,)}$$

berarti terbukti bahwa:

$$\frac{\mathrm{G/H}}{\mathrm{K/H}} \cong \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{K}}$$