Pertemuan : 3

Materi : Sistem Persamaan Linear :

- Teorema Eksistensi
- Reduksi ke Bentuk Echelon

Standar Kompetensi :

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa diharapkan dapat

1. memahami kembali pengertian matriks dan transformasi linear
2. memahami penggunakan matriks dan transformasi linear dalam menyelesaikan permasalahan

Kompetensi Dasar:

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa diharapkan dapat

1. membuktikan secara formal tentang teorema eksistensi
2. menuliskan kembali definisi ruang bagian paralel
3. menuliskan kembali definisi ruang bagian affine
4. menuliskan kembali definisi bentuk matriks eselon tereduksi
5. menentukan matriks lengkap dari suatu sistem persamaan linear

Uraian Materi :

3. Sistem Persamaan Linear

Suatu sistem persamaan linier mempunyai bentuk

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m. \end{aligned} \qquad (\mathcal{L}in)$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ tidak diketahui, dan akan dicari. *mn* dari $a_{i,j}$ dimana $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ disebut **koefisien** dari sistem persamaan linier $(\mathcal{L}in)$ dan masing-masing nilainya tertentu. **Solusi** dari sistem persamaan linier $(\mathcal{L}in)$ adalah *n-tuple* terurut dari $(s_1 + s_2 + \cdots + s_n)$ sehingga persamaan *m*

$$a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \ldots + a_{1,n}s_n = b_1,$$
$$a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2 + \ldots + a_{2,n}s_n = b_2,$$
$$\vdots$$
$$a_{m,1}s_1 + a_{m,2}s_2 + \ldots + a_{m,n}s_n = b_m,$$

adalah benar. Untuk menyelesaikan sistem *(Lin)* berarti mencari semua solusi dari *(Lin)*.

4. Teorema Eksistensi :

Perhatikan matriks di bawah ini :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Matriks **A** dinamakan **matriks koefisien** dari sistem linier *(Lin)*, dan **B** matriks **konstan** dari sistem linier. Kita dapat menuliskan sistem persamaan linier dalam bentuk persamaan matriks tunggal

(Mat) $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$

Pemecahan dari persamaan matriks ini dapat digambarkan secara sederhana dalam transformasi linier. Kita misalkan

$$\mathbf{T} : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$$

adalah transformasi linier relatif terhadap basis standar **A**. Sehingga

$$\mathbf{T}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{m,j} x_j \right)$$

Misal $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ adalah vektor di $\mathcal{R}^m$. Solusi dari *(Mat)* adalah vektor (s_1, s_2, …, ...,s_n) di $\mathcal{R}^n$ sehingga

$$\mathbf{T}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Proposisi 4.1 :

Sistem linier *(Lin)* mempunyai solusi jika dan hanya jika vektor (b_1, b_2, …, b_m) terletak pada *image* dari transformasi $\mathbf{T} : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$, yaitu, jika dan hanya jika $\mathbf{B} \in \mathbf{I}\mathrm{m}(\mathbf{T})$.

Definisi 4.2 :

Jika **A** = $(a_{i,j})$ sebuah matriks *m* x *n*, vektor kolom dari **A** adalah *n* vektor

$\mathbf{A}_{(1)} = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{m,1})$

$\mathbf{A}_{(2)} = (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{m,2})$

$\vdots$

$\mathbf{A}_{(n)} = (a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{m,n})$

di $\mathcal{R}^m$. Ruang kolom **A** adalah merentang linier dari vektor kolom di $\mathcal{R}^m$.

Contohnya, jika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka vektor kolom dari **A**, ada dua vektor

(1,-1,0), (0,-2,2)

di $\mathcal{R}^3$.

Teorema 4.3 :

Misalkan

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

sebuah sistem persamaan linier. Definisikan matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Maka sistem linier mempunyai solusi jika dan hanya jika vektor **B** = (b_1, b_2, …, b_m) dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor kolom **A**.

Definisi 4.4 :

Sistem persamaan linier

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

dikatakan homogen jika

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Teorema 4.5 : :

Misalkan

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

sebuah sistem persamaan linier homogen. Maka himpunan $\mathcal{S} = \{(s_1 + s_2 + \cdots + s_n)\}$ solusi dari sistem linier ini adalah subruang dari $\mathcal{R}^n$. Lebih tepat jika

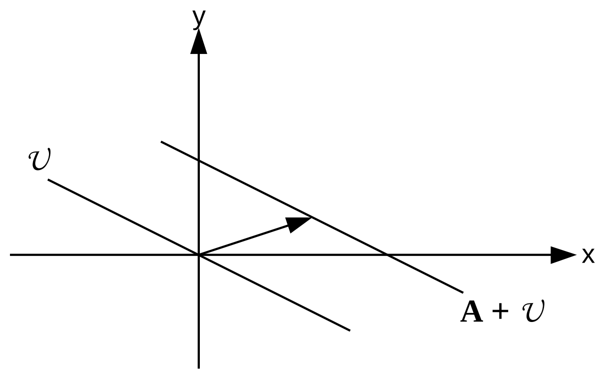
$$\mathbf{T} : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$$

adalah transformasi linier yang matriksnya relatif terhadap basis standar **A**, maka $\mathcal{S}$=ker(**T**).

Definisi 4.6 :

Misalkan $\mathcal{V}$ ruang vektor, $\mathcal{U}$ subruang dari $\mathcal{V}$, dan $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$. Notasikan $\mathcal{A} = \mathbf{A} + \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ himpunan semua vektor berbentuk **A** + **X** dimana $\mathbf{X} \in \mathcal{U}$. Himpunan **A** + $\mathcal{U}$ dinamakan ***parallel translate,*** **subbagian paralel**, atau **paralel** $\mathcal{U}$ di $\mathcal{V}$. Ini dinamakan hasil translasi paralel $\mathcal{U}$ oleh vektor **A**. Paralel dari beberapa subruang di $\mathcal{V}$ dinamakan **subruang affine** di $\mathcal{V}$.

Gambar 2.1 menunjukkan sebuah subruang affine di $\mathcal{R}^2$. Hasil dari traslasi paralel oleh vektor $\mathbf{A} = (3,1) \in \mathcal{R}^2$ dari subruang $\mathcal{U} = \{(x + y + z \mid x + y = 0)\}$ direntang oleh vektor $(1,-1) \in \mathcal{R}^2$.



Gambar 3.1

Proposisi 4.7 :

Jika $\mathcal{U}$ subruang dari vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, maka :

(1) $\mathbf{A} \in \mathbf{A} + \mathcal{U}$.

(2) Jika $\mathbf{B} \in \mathbf{A} + \mathcal{U}$ maka $\mathbf{B} + \mathcal{U} = \mathbf{A} + \mathcal{U}$.

(3) Dua paralel $\mathcal{U}$ *coincide* atau tidak mempunyai vektor bersama.

(4) Jika $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{A} + \mathcal{U}$ maka $\mathbf{B} - \mathbf{C} \in \mathcal{U}$.

Proposisi 4.8 :

Misalkan $\mathbf{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ transformasi linier dan $\mathbf{C} \in \mathbf{I}\mathrm{m}(\mathbf{T})$. Misalkan $\mathcal{A} = \{\mathbf{V} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{T}(\mathbf{V}) = \mathbf{C}\}$, **A** himpunan vektor di $\mathcal{V}$ di mana *image* di bawah **T** adalah vektor **C**. Maka $\mathcal{A}$ subruang affine di $\mathcal{V}$. Jika **A** sebarang vektor di $\mathcal{V}$ demikian sehingga $\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}$, maka

$$\mathcal{A} = \mathbf{A} + \ker(\mathbf{T}).$$

Teorema 4.9 : :

Misalkan (dalam notasi matriks) bahwa

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

adalah sistem persamaan linier, maka. himpunan semua solusi $\mathcal{S} = \{\, (s_1 + s_2 + \cdots + s_n) \,\}$ terhadap sistem linier ini adalah kosong atau subruang affine di $\mathcal{R}^n$. Lebih tepat, jika $\mathbf{T} : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ transformasi linier yang matriksnya relatif terhadap basis standar di **A**, maka $\mathcal{S}$ adalah *parallel translate* dari $\ker(\mathbf{T})$ oleh suatu vektor S di $\mathcal{S}$, atau $\mathcal{S} = \varnothing$.

Jadi kita lihat bahwa untuk menentukan solusi dari sistem linier

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

kita harus menentukan subruang affine tertentu di $\mathcal{R}^n$. Ini dapat dilakukan dengan mencari basis untuk ruang solusi dari sistem

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

dan mencari solusi partikulir tunggal dari persamaan (jika hanya satu)

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

5. Reduksi Bentuk Eselon

Definisi 5.1 :

:Sebuah matriks **A** = $(a_{i,j})$ dikatakan berada dalam bentuk eselon tereduksi jika mempunyai sifat-sifat berikut :

1. Jika baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1. (bilangan ini dinamakan ini 1 utama).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bawah matriks.
3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.
4. Masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Sebuah matriks yang mempunyai sifat-sifat 1, 2, dan 3 dikatakan berada dalam bentuk matriks eselon.

Definisi 5.2 : :

Jika **A . X** = **B** adalah sistem persamaan linier, maka matriks

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}$$

dinamakan matriks *augmented* dari sistem linier.