Modul 8

LUAS DAERAH LINGKARAN

PELATIHAN GURU-GURU MATEMATIKA

DI SUNGAI LIAT BANGKA

Oleh: Turmudi

PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

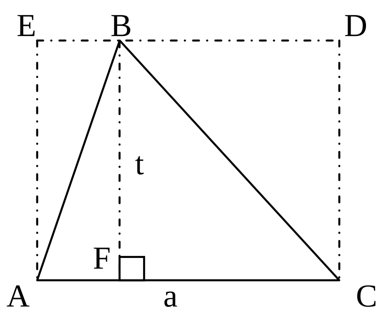
2009

LUAS DAERAH LINGKARAN

Pengantar

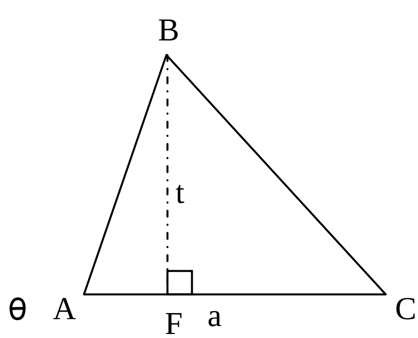
Menentukan luas daerah segitiga dapat dilakukan dengan berbagai cara di antaranya aturan yang sudah dikenal oleh orang dalam waktu yang cukup lama, misalkan Luas = ½ alas x tinggi. Namun orang dapat pula menentukan rumus luas segitiga ini dengan cara lain, misalkan menggunakan rumus Luas = ½ x a x b x sin θ atau Luas = √[s(s-a)(s-b)(s-c)]

Secara konvensional rumus segitiga ½ x alas x tinggi, dapat secara mudah diperkenalkan sebagai:



Luas daerah ACDE adalah AEBF ditambah luas BDCF, sedangkan Luas ABF = Luas ABE dan luas BCF = luas luas BDC. Karenanya luas ABC = ½ luas ACDE atau kita dapat katakan bahwa luas ABC = ½ x a x t. Penjelasan seperti ini barangkali sudah diperkenalkan sejak siswa duduk di bangku sekolah dasar.

Sekarang kita akan melihat sisi lain menentukan luas daerah segitiga dengan menggunakan rumus lain dan kegunaan dari rumus tersebut untuk membangun pengetahuan bidang lain dalam matematika. Rumus luas daerah segitiga ½ a x b x sin θ dapat dijelaskan sebagai berikut ini.



Dari rumus luas daerah segitiga ½ x alat x tinggi kita gunakan untuk membuktikan luas= ½ a x b x sin θ

Kita memiliki hubungan perbandingan trigonometri $\sin \theta = t/(AB)$, karenanya $t = AB \sin \theta$. Nah hubungan ini digunakan untuk menggnatikan nilai t pada Luas = $\frac{1}{2} \times a \times t$, sehingga kita dapatkan luas = $\frac{1}{2} \times a \times AB \sin \theta$. , karena AB = c, akibatnya

Luas = $\frac{1}{2} \times a \times c \times \sin \theta$.

Contoh:

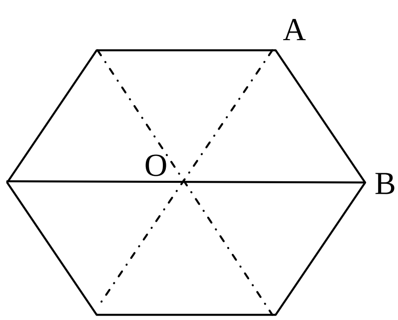
Sebuah segitiga ABC diketahui sisi AB dan AC berturut-turut adalah 6 cm dan 7 cm sedangkan sudut A = 30°. Berapakah luas daerah ABC?

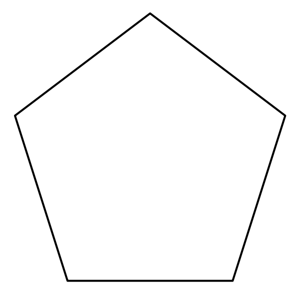
Menurut rumus Luas = $\frac{1}{2} \times a \times c \times \sin \theta$. , AB = c = 6 cm, AC = b = 7 cm dan $\angle A = 30°$, sehingga luas = $\frac{1}{2} \times 6 \times 7 \times \sin 30°$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 7 \times \frac{1}{2}$

$= 10{,}5 \text{ cm}^2$

Kekuatan dari rumusan di atas ternyata dapat digunakan untuk menentukan luas daerah polygon beraturan (segi-n beraturan).





Pandang sebuah segi-enam beraturan dengan OA = 8 cm. Di sini akan terdapat sebanyak 6 buah segitiga sama kaki yang konruen, dengan sudut pusatnya adalah 360°/6 = 60°. Karenanya luas satu segitiga adalah L= $\frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 60° = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$, karenanya luas 6 buah segitiga = $6 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 60° = 96\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Apakah cara seperti ini dapat digunakan untuk menentukan luas daerah lingkaran? Lingkaran memang bukan polygon. Namun polygon beraturan segi banyak akan tampak mendekati lingkaran. Pandanglah suatu polygon segi-20, atau polygon segi-100. Bagaimanakan menentukan luas dareha polygon beraturan segi-20 dan segi-100?

Poligon segi-20 beraturan = $20 \times \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin (360°/20)$

$= 10\, r^2 \times \sin 18°$

Poligon segi-100 beraturan= $100 \times \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin (360°/100)$

$= 50\ r^2 \times \sin 3.6°$

Banguns segi-10000 beraturan= $10000 \times \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin (360°/10000)$

$= 5000\ r^2 \times \sin 0{,}036°$

Nah dengan intuisi seperti itu seseorang dapat nmenentukan luas daerah segi n beraturan dengan n besar sekali, maka polygon ini akan mendekati bentuk lingkaran.

Sehingga kita dapat merumuskan sebagai

Luas segi-n beraturan $= \lim_{n\to\infty} (n \times \frac{1}{2} \times r^2 \sin (2\pi/n)) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \ (2\pi/n)/(2\pi/n) \times (n \times \tfrac{1}{2} \times r^2 \sin (2\pi/n))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ (2\pi/n) \times (n \times \tfrac{1}{2} \times r^2 \sin (2\pi/n)/\ )/(2\pi/n))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ (\pi \times r^2) \times \lim_{n\to\infty} \sin (2\pi/n)/(2\pi/n)$$

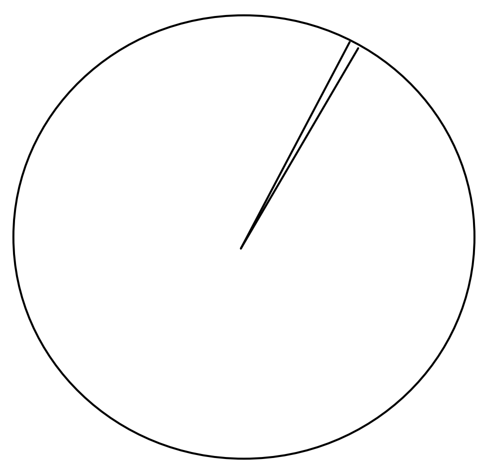
$$= (\pi \times r^2) \lim_{n\to\infty} \sin (2\pi/n)/(2\pi/n)$$

$$= (\pi \times r^2)$$

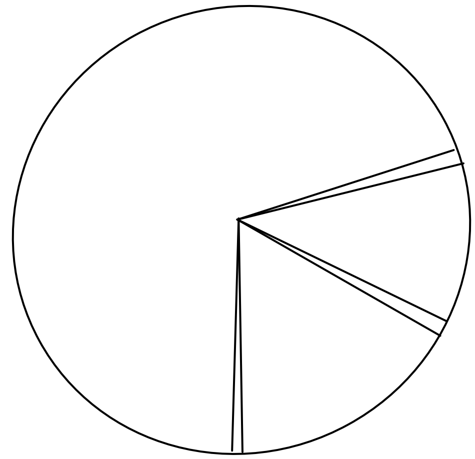
Dan luas ini tak lain adalah merupakan luas daerah lingkaran berjari-jari r

Pada lingkaran ini kita memandang terdapat n buah segitiga kongruen yang masing-masing luasnya adalah $\frac{1}{2} r^2 \sin (2\pi/n)$

Kekuatan aturan ini dapat digunakan untuk memperlihatkan bahwa luas daerah lingkaran dapat didekati dengan aturan luas segitiga menggunakan sinus dan aturang polygon. Setiap siswa umumnya mengetahui bahwa luas daerah lingkaran adalah πr^2



Terlepas dari perhitungan luas daerah lingkaran menggunakan aturan di atas, siswa juga dapat menggunakan aturan lain:



Luas daerah lingkaran = $L\Delta_1$ + $L\Delta_2$ + $L\Delta_3$ + $L\Delta_4$ + … + $L\Delta_{n-1}$ + $L\Delta_n$

Setiap segitiga itu dapat dipandang sebagai sebuah segitiga dengan tinggi r dan alasnya adalah a, sehingga Luas sebuah segitiga adalah $\frac{1}{2}$ ra.

Atau kita tuliskan

$L\Delta_1 = \frac{1}{2}\, r\, a_1$

$L\Delta_2 = \frac{1}{2}\, r\, a_2$

$L\Delta_3 = \frac{1}{2}\, r\, a_3$

…………………….

$L\Delta_{n-1} = \frac{1}{2}\, r\, a_{n-1}$

$L\Delta_n = \frac{1}{2}\, r\, a_n$

______________________________ +

Luas daerah keseluruhan adalah $(\frac{1}{2}\, r\, a_1 + \frac{1}{2}\, r\, a_2 + \frac{1}{2}\, r\, a_3 + \ldots + \frac{1}{2}\, r\, a_{n-1} + \frac{1}{2}\, r\, a_n)$

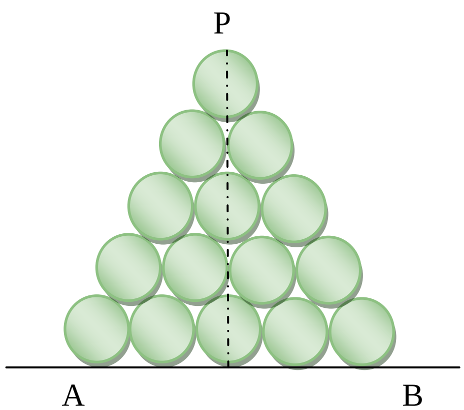
$L\ O = \frac{1}{2}\, r\, (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n)$

Kita tahu bahwa $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ keliling lingkaran berjari-jari r tersebut, sehingga

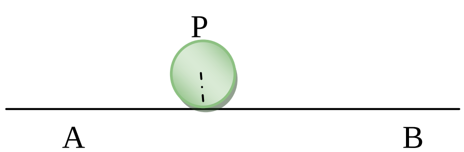
$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 2\pi r$

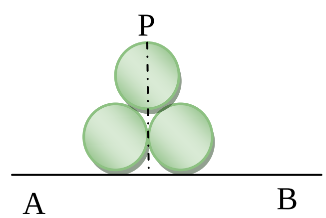
Karenanya $L\ O = \frac{1}{2}\, r\, (2\pi r) = \pi r^2$

Dalam kehidupan sehari-hari seringkali anda menemukan tumpukan-tumpukan seperti tampak pada gambar di bawah ini. Andaikan lingkaran-lingkaran ini berjari-jari seragam 4 cm. Hitung tinggi dari titik tertinggi P dari alas AB



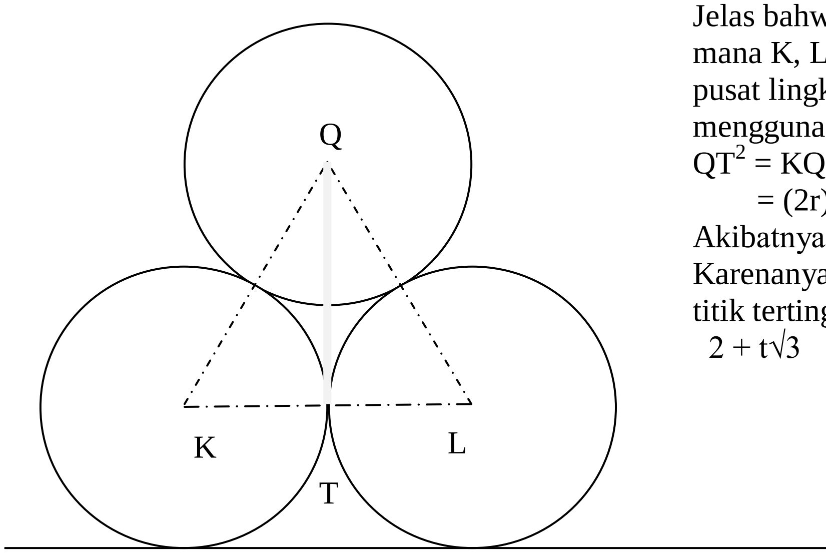
Kita mulai dari pemikiran sederhana, bahwa jika lingkaran itu ada satu tingkat saja, maka jarak dari titik P ke alas AB adalah 2R (dengan R adalah jari-jari lingkaran).





Untuk gambar 1 (sebuah) lingkaran seperti di atas tidaklah terlalu sulit untuk disimpulkan, sebab jarak titik tertinggi P terhadap AB adalah 2R, namun untuk titik P pada gambar di bawah ini perlu pemikiran yang serius dari siswa.

Selanjutnya perhatikan diagram berikut ini.



Jelas bahwa KL=2r dan KQ = LQ = 2r di mana K, L, Q berturut-turut merupakan pusat lingkaran, sehingga QT dapat dicari menggunakan teorema Pythagoras.

$QT^2 = KQ^2 - KT^2$

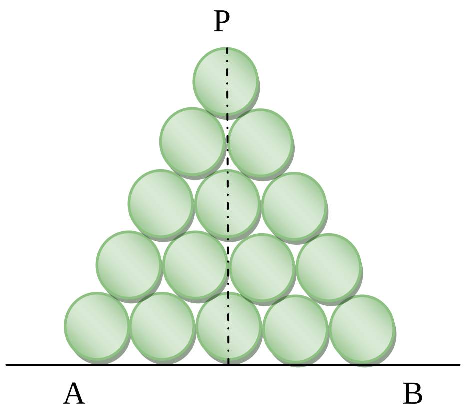
$\quad = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$

Akibatnya $QT = t\sqrt{3}$

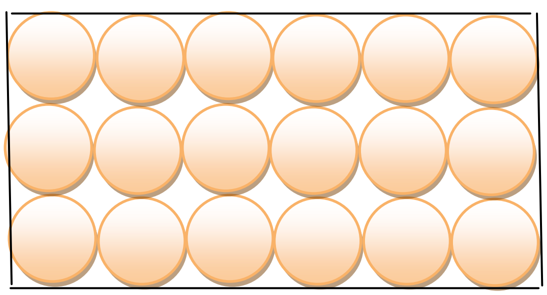
Karenanya mudah dikatakan bahwa jarak titik tertinggi P dari alas adalah

$2 + t\sqrt{3}$

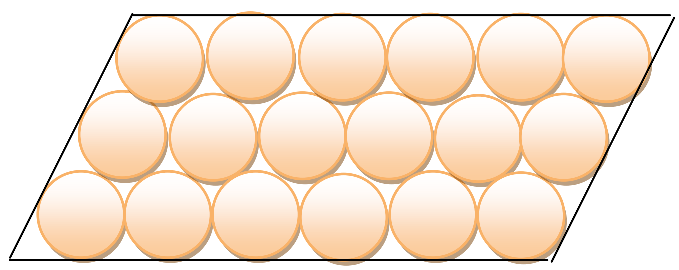
Cara berfikir seperti di atas digunakan untuk menentukan tinggi titik tertinggi P dari alas AB. Coba pembaca (para siswa) cari berapakah jarak titik tertinggi P terhadap alas AB pada gambar di bawah ini.



Dengan menggunakan dasar pemikiran tersebut di atas, siswa akan mengambil sebuah keputusan mana yang memerlukan tempat lebih banyak, susunan seperti pada Gambar xx(a) atau Gambar xx(b), atau sebenarnya dua gambar ini memerlukan tempat yang sama luas?



Gambar xx(a)



Gambar xx(b)

Berikan penjelasan sedemikian sehingga teman-teman di kelas memperoleh rasional yang benar dan memuaskan.