PENALARAN DALAM GEOMETRI

PELATIHAN GURU-GURU MATEMATIKA

DI MANOKWARI

PAPUA BARAT

Oleh:

Drs.Turmudi, M.Ed., M.Sc., Ph.D.

PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2010

PENALARAN DALAM GEOMETRI

Oleh: Turmudi

Ketika seorang guru hendak mengembangkan kemampuan penalaran kepada siswa, ia mencoba mengungkapkan perTanyaan berikut ini: "Jumlah tiga bilangan genap berurutan adalah 54. Dapatkah kalian menentukan bilangan terkecil?" Dapatkah kalian menentukan hasil kali antara bilangan terkecil dan bilangan terbesar?"

Siswa diminta untuk memberikan jawaban dan argumentasi dari pertanyaan-pertanyaan tersebut.

M1: Kalau jumlah tiga bilangan genap berurutan itu 54, maka dengan mudah saya dapatkan bilangan yang tengah adalah 18.

G: Mengapa kalian peroleh itu?

M1: Sebab 18 + (16 + 20) = 54 dan kita dapat menyusun kembali sebagai 16 + 18 + 20

G: Dapatkah kalian membuat rasional yang mudah dan masuk akal bagi kita semua?

M2: Misalkan bilangan terkecil adalah x, maka bilangan-bilangan lainnya adalah $x + 2$ dan $x + 4$

G: Selanjutnya bagaimana kalian mendapatkan bilangan tengah itu 18

M2: Karena menurut informasi bahwa $x + (x + 2) + (x + 4) = 54$ sehingga saya dapakan bahwa $3x + 6 = 54$ atau $3x = 48$, dan $x = 16$. Sehingga bilangan yang tengah adalah $16 + 2 = 18$.

G: Baik, sekarang kamu telah dapatkan bilangan tengah yaitu 18. Selanjutnya dapatkah kalian menentukan bilangan terbesar?

M3: Saya, guru. Bilangan terbesar adalah $x + 4$, sehingga $16 + 4 = 20$

G: Berapa hasil kali bilangan terbesar dan terkecil?

M1: Hasil kalinya adalah $x \times (x + 4) = 16 \times 20 = 320$.

Penalaran ini dapat dilakukan siswa sehingga dengan mudah siswa dapat mencari bahwa apabila tiga bilangan genap berurutan nilainya tertentu, ia dapat mencoba mencarinya.

Andaikan pertanyaan lanjutan disampaikan, misalkan hasil kali bilangan terkecil dan terbesar dari tiga buah bilangan genap positif berurutan adalah 320. Berapakah bilangan-bilangan genap yang dimaksudkan?

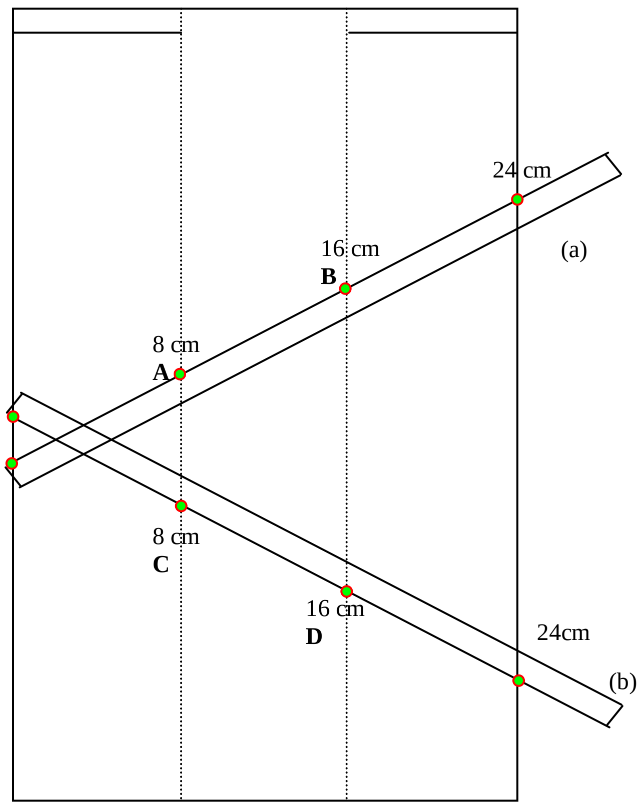
Penalaran ini dapat dituliskan sebagai: Bilangan terkecilnya misalkan x dan bilangan yang terbesar adalah (x+4), selanjutnya kita dapatkan $x(x+4) = 320$.

Sehingga kita miliki sebuah persamaan $x^2 + 4x = 320$ atau $x^2 + 4x - 320 = 0$. Selanjutnya dengan menyelesaikan representasi matematika yang berupa persamaan $x^2 + 4x - 320 = 0$, siswa diharapkan dapat menentukan nilai x yang memenuhi dan nilai x yang masuk akal.

Kebiasaan bertanya mengapa penalaran dalam matematika itu esensial dan penting. Semua siswa dalam satu kelas membayangkan seorang siswa yang membagi kertas berukuran: 8 ½ inci × 11 inci ke dalam tiga kolom yang sama besar. Siswa sudah siap mengukur dengan penggaris namun guru segera mengemukakan metode tukang kayu (pertukangan) dalam membagi menjadi tiga sama panjang hendaknya digunakan.

Guru memperlihatkan penggaris berukuran 24 cm yang tampak skala 0, 8, 16, dan 24. Kertas yang akan dibagi 3 lebarnya kurang dari 24 cm, mungkin hanya sekitar 20 cm.

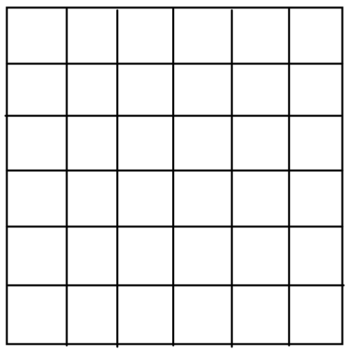
(a) Dengan memposisikan penggaris 24 cm seperti pada gambar, titik-titik 0 cm Selanjutnya A dan C dihubungkan, demikian juga titik B dan titik D juga dihubungkan, sehingga di dapat garis AC dan garis BD yang membagi kertas menjadi tiga bagian sama lebar. Dan seperti itulah tukang kayu membagi kertas atau menjadi kayu atau membagi apapun menjadi tiga sama besar. Tukang kayu menggunakan *trick* ini untuk membagi kayu menjadi 1/3-nya. Pertanyaan guru kepada siswanya adalah mengapa hal ini berlaku? Apakah pembagian ini juga berlaku untuk membagi ke dalam empat bagian sama besar? Atau sebarang bagian yang sama.



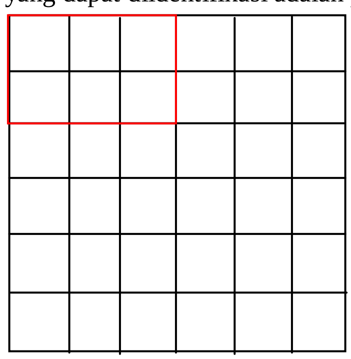
Bagaimana penalaran ini diterapkan pada cara berfikir geometri berikut ini. Bagaimana seorang siswa dapat meyakini bahwa persegi merupakan persegi panjang, padahal sejak sekolah dasar telah diajari persegi adalah bangun ”yang seperti ini” sedangkan persegi panjang adalah ”bangun yang seperti itu”. Penalaran agar siswa memahami mengapa persegi juga merupakan persegi panjang diperlukan oleh siswa untuk memahami konsep bahwa sesuatu itu mungkin ”inclusive berada di dalam yang lain” atau sesuatu itu saling lepas sama sekali dengan yang lainnya.

Selanjutnya perhatikanlah penalaran berikut ini:

Siswa diminta mencari berapakah banyak persegi panjang dengan segala ukuran pada gambar bangun di bawah ini



Salah satu persegi panjang yang dapat diidentifikasi adalah persegi panjang pada gambar berikut ini dengan ukuran 3 x 2.



Tentu permasalahan seperti ini bukan persoalan matematika yang sederhana yang dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus dalam waktu yang sangat singkat.

Siswa hendaknya diajak untuk melihat pengetahuan yang mereka miliki sebelumnya.

Salah satu persyaratan yang tak kalah pentingnya adalah memahami bahwa “persegi adalah suatu persegi panjang”. Yang merupakan rangkaian sangat hirarkis:

(1) Sebuah persegi adalah persegi panjang

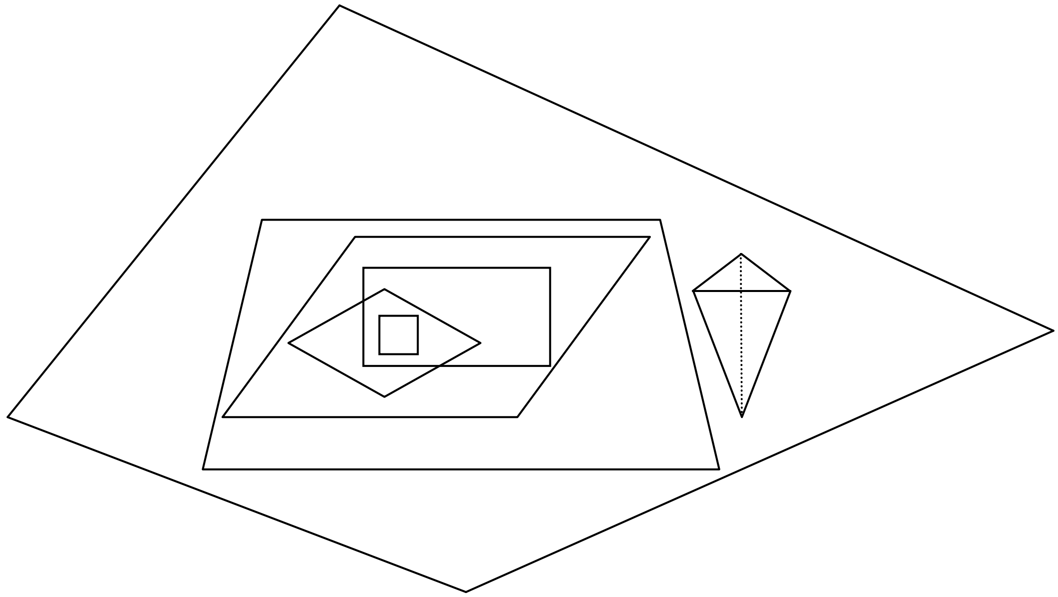
(2) Sebuah persegi panjang adalah jajargenjang

(3) Sebuah jajargenjang adalah “trapezium” (Ada pemikiran lain)

(4) Sebuah trapezium adalah segi empat

(5) Sebuah belah ketupat adalah jajar genjang

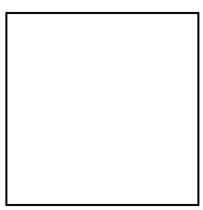
(6) Sebuah belahketupat yang berupa persegi panjang adalah persegi



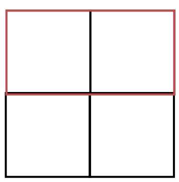
Kalau pemikiran dan penalaran siswa sudah dapat menangkap pengertian bahwa sebuah persegi juga dapat dipandang sebagai persegi panjang, maka perhiungan dan penalaran berikut ini tidaklah menjadi sulit.

Selanjutnya perhatikan rangkaian penalaran berikut ini:

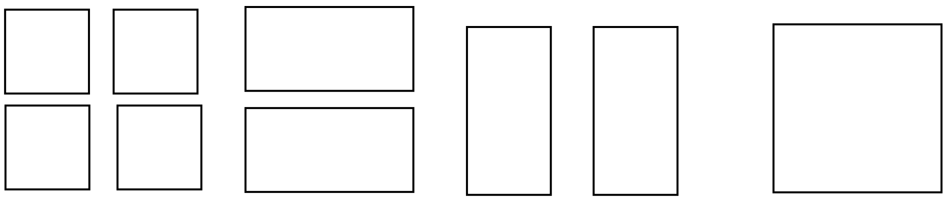
Berapakah banyak persegipanjang pada persegi berikut ini



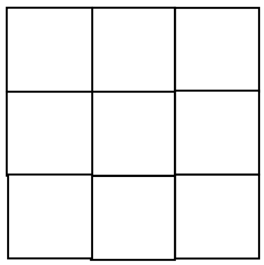
Bagaimana kalau persegi itu berukuran 2 x 2 ada berapa persegipanjang yang terdapat pada bangun berikut?



Untuk persegi 2 x 2 ini anda dengan mudah dapat melihat dan mengidentifikasi persegipanjang yang terbentuk adalah:



Yang berukuran 1 x 1 ada 4 buah
Yang berukuran 1 x 2 ada 4 buah
Yang berukuran 2 x 2 ada 1 buah
Jadi dapat kita katakan bahwa untuk persegi 2 x 2 terdapat *9 buah persegi panjang*.
Bagaimanakah kalau persegi itu berukuran 3 x 3

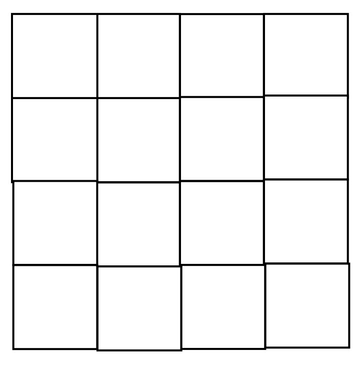


Dengan analisis sederhana kita dapat membuat rincian sebagai betrikut:

(a) yang berukuran 1 x 1 ada 9 buah
(b) yang berukuran 2 x 2 ada 4 buah
(c) yang berukuran 3 x 3 ada 1 buah
(d) yang berukuran 1 x 2 ada 12 buah
(e) yang berukuran 1 x 3 ada 6 buah
(f) yang berukuran 2 x 3 ada 4 buah

Sehingga secara keseluruhan ada *36 buah persegi panjang.*
Dengan berpola seperti itu, kita analisis untuk persegi 4 x 4

(a) yang berukuran 1 x 1 ada 16 buah
(b) yang berukuran 2 x 2 ada 9 buah
(c) yang berukuran 3 x 3 ada 4 buah
(d) Yang berukuran 4 x 4 ada 1 buah
(e) yang berukuran 1 x 2 ada 24 buah
(f) yang berukuran 1 x 3 ada 16 buah
(g) yang berukuran 1 x 4 ada 8 buah
(h) Yang berukuran 2 x 3 ada 12 buah
(i) Yang berukuran 2 x 4 ada 6 buah
(j) Yang berukuran 3 x 4 ada 4 buah



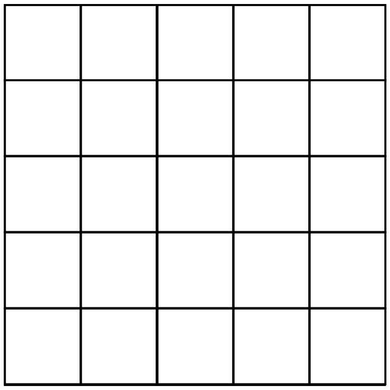
Sehingga secara keseluruhan teradap sebanyak *100 buah persegi panjang.*

Dengan menggunakan keterangan terdahulu siswa diminta untuk memberikan dugaan (*conjecture)* banyaknya persegi panjang terjadi dari sebuah petak 5 x 5. Siswa diminta untuk menduga berapakah banyaknya persei panjang yang terbentuk.

Bentuk dugaan (*conjecture)* yang dibuat siswa mungkin berbunyi seperti ini. "*Untuk persegi 5 x 5 menurut dugaan saya akan terdapat sebanyak 225 persegi panjang*"

Karena untuk
1 x 1 ada 1 buah
2 x 2 ada 9 buah
3 x 3 ada 36 buah

4 x 4 ada 100 buah
5 x 5 ada 225 buah
6 x 6 ada 441 buah



225 dan 441 merupakan dugaan yang masih harus dibuktkan kebenarannya

(a) yang berukuran 1 x 1 ada 25 buah
(b) yang berukuran 2 x 2 ada 16 buah
(c) yang berukuran 3 x 3 ada 9 buah
(d) Yang berukuran 4 x 4 ada 4 buah
(e) Yang berukuran 5 x 5 ada 1 buah
(f) yang berukuran 1 x 2 ada 40 buah
(g) yang berukuran 1 x 3 ada 30 buah
(h) yang berukuran 1 x 4 ada 20 buah
(i) Yang berukuran 1 x 5 ada 10 buah
(j) Yang berukuran 2 x 3 ada 24 buah
(k) Yang berukuran 2 x 4 ada 16 buah
(l) Yang berukuran 2 x 5 ada 8 buah
(m) Yang berukuran 3 x 4 ada 12 buah
(n) Yang berukuran 3 x 5 ada 6 buah
(o) Yang berukuran 4 x 5 ada 4 buah

Secara keseluruhan banyaknya persegi panjang di atas adalah *225 buah.* Dengan demikian konjektur yang dibuat terbukti benar.

Konjektur yang kedua diserahkan kepada siswa sebagai aktivitas matematika problem solving.

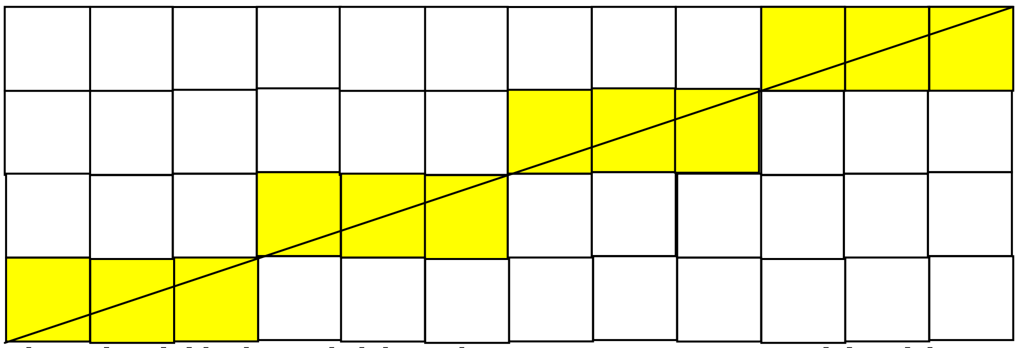
Namun sebenarnya siswa dapat mencari sendiri pembuktian di atas, nah bagaimana pembuktian tersebut silakan bapak/ibu guru mencoba memperlihatkannya.

Pemecahan masalah dan Penalaran

Problem solving lain yang dapat siswa selidiki adalah banyaknya persegi yang terlalui oleh garis diagonal apabila persegipanjang tersebut berukuran mxn dengan m dan n bilangan asli.

Misalkan:

Persegipanjang dengan ukuran m = 12 dan n = 4



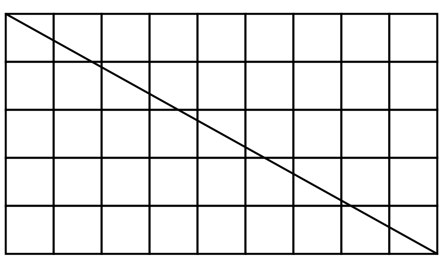
Coba anda selidiki, berapakah banyaknya persegi satuan yang terlalui oleh garis diagonal.

Misalkan dengan membuat beberapa contoh dan menyalinnya ke dalam tabel sebagai berikut:

m	n	mn	Banyaknya persegi yang terlalui	Keterangan
3	2	6	4	
4	2	8	4	
5	2	7	6	
6	2			
6	3			
7	3			
7	4			
8	3			

b. Apa yang dapat anda simpulkan untuk memperoleh generalisasi tentang banyak persegi yang terlalui oleh persegipanjang berukuran 9 x 5

c. Bagaimana anda dapat menyimpulkan keadaan tersebut



d. Dapatkah anda menjelaskan terhadap kesimpulan yang anda buat?

KESEBANGUNAN DAN KEKONGRUENAN BANGUN DATAR (SEGITIGA)

PELATIHAN GURU-GURU MATEMATIKA

DI MANOKWARI

PAPUA BARAT

Oleh:

Drs.Turmudi, M.Ed., M.Sc., Ph.D.

PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2010

Kesebangunan dan Kekongruenan

Kesebangunan

Gambar berskala, foto, dan model berskala banyak digunakan dala, enggambaran peta geografi. Misalkan peta pulau Jawa dengan skala 1: 10.000.000 artinya 1 cm dalam peta sama dengan 10.000.000 cm dalam jarak yang sesungguhnya atau sama dengan 100 km.

Contoh jarak Bandung Yogyakarya dalam peta adalah 4,5 cm dan skala peta tersebut adalah 1: 10.000.000 Berapakah jarak sesungguhnya dari Bandung sampai Yogyakarta?

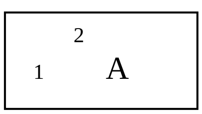
1   2   4   4,5

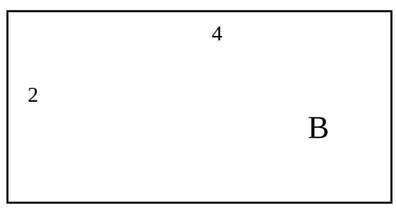
100km   200 km   400km   450km

Karenanya Bandung-Yogyakarta berjarak 450 km

Bangun yang sebangun

Dua bangun dikatakan sebagun apabila sisi-sisi yang bersesuaian sebanding dan sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.

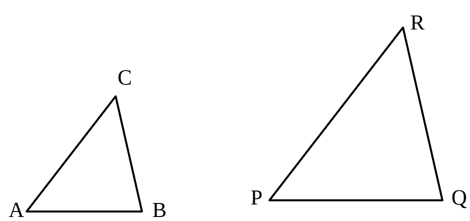




Kedua bangun di atas merupakan persegi panjang berarti setiap sudutnya sama besar 90^0

Anda dapat perlihatkan bahwa 1: 2 = 2 : 4

Kesebangunan ini tidak hanya terbatas pada persegipanjang saja juga berlaku pada setiap bangun datar yang sisinya lurus.



Segitiga ABC dan PQR dikatakan sebangun maka

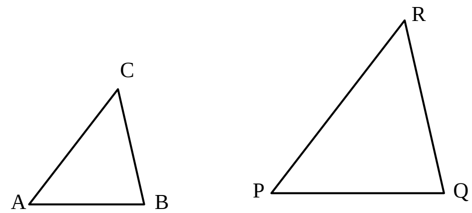
(1) $\angle A = \angle P$

(2) $\angle B = \angle Q$

(3) $\angle C = \angle R$

Dan AB : PQ = BC : QR = AC : PR

Misalkan ABC dan PQR sebangun, AB = 12 cm BC = 8 dan AC = 15. Apabila PQ = 18 cm tentukan panjang sisi-sisi yang lainnya pada segitiga PQR?



Misalkan QR = x dan PR = y, karena memenuhi AB : PQ = BC : QR = AC : PR, maka

12 : 18 = 8 : x = 15 : y

Karenanya ita memiliki dua perbandingan

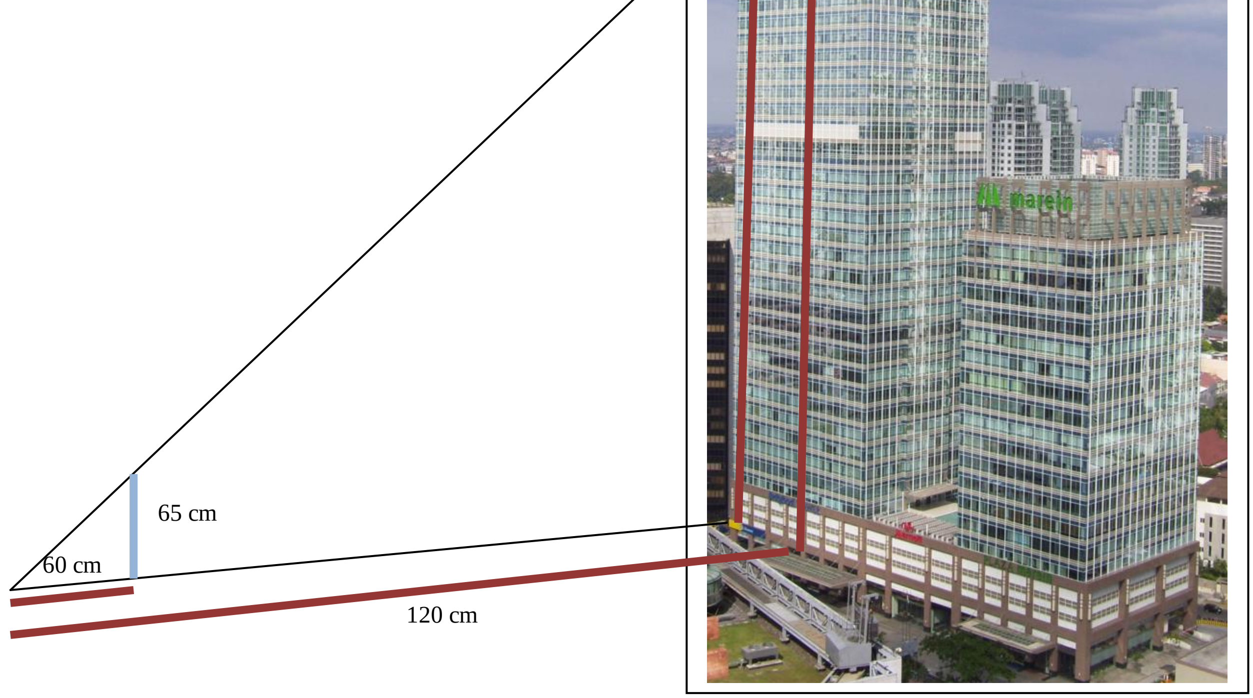
(i) 12 : 18 = 8 : x

(ii) 12 : 18 = 15 : y

Dari (i) kita dapatkan bahwa 12x = (8)(18) = 144, sehingga x = 12

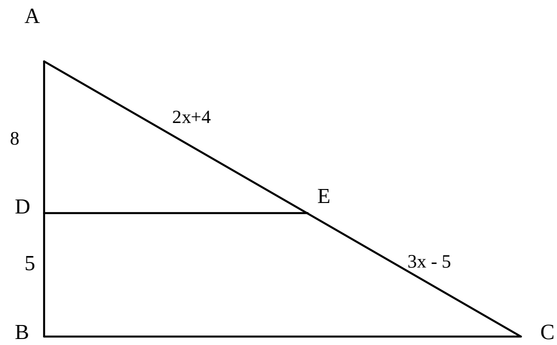
Dari (ii) kita dapatkan bahwa 12y = (15)(18), sehingga y= 22.5

Berapakah tinggi pencakar langit ini?



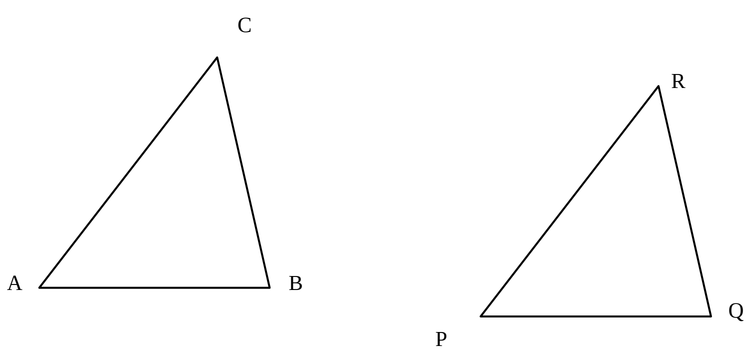
Bagaimana menerapkan konsep kesebangunan, perhatikan soal berikut ini dan cobalah selesaikan?

Pada segitiga ABC di bawah ini dibuat DE sejajar BC dengan D pada AB dan E pada AC sedemikian sehingga AD = 8 cm DB = 5 cm, AE = 2x + 4 cm dan EC = 3x-5 cm. Andaikan $\angle B = 90^0$ berapakah panjang BC?



Kekongruenan

Ketika membandingkan dua segitiga pada konsep kesebangunan sudut-sudut seletaknya sama besar dan sisi-sisinya sebanding. Apabila perbandingan sisi-sisi yang seletak bernilai 1, misalkan pada perbandingan AB : PQ =1, BC : QR = 1 dan AC : PR = 1, maka kedua segitiga ABC dan PQR adalah sama dan sebangun atau dikenal dengan istilah kongruen



Dua segitiga kongruen apabila (1) sisi-sisi yang seletak sama panjang, (2) sudut-sudut yang seletak sama besar.

Akibat kedua bangun ABC dan PQR kongruen maka:

(i) $\angle A = \angle P$

(ii) $\angle B = \angle Q$

(iii) $\angle C = \angle R$

(iv) AB = PQ

(v) BC = QR

(vi) AC = PR

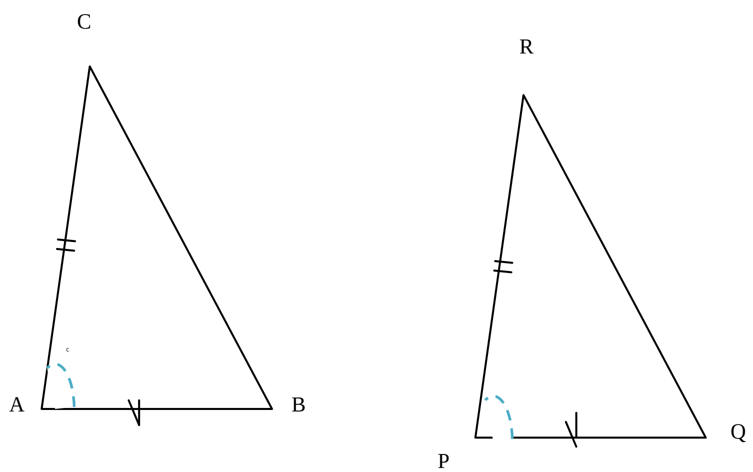
Namun untuk menyatakan apakah dua buah segitiga itu konguen, hanya memerlukan kombinasi 3 dari kesamaan (i) – (vi) di atas

Misalkan kombinasi

(a). Kombinasi (i), (iv) dan (ii) dikenal dengan ASA (atau Sudut-Sisi-Sudut);

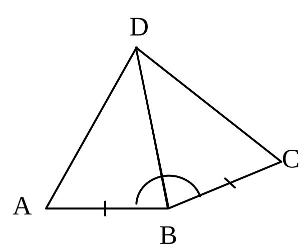
(b). Kombinasi (iv) , (ii) dan (v) dikenal dengan SAS (atau Sisi-Sudut-Sisi)

(c) Kombinasi (iv), (v) dan (vi) aturan SSS (atau Sisi-Sisi-Sisi).

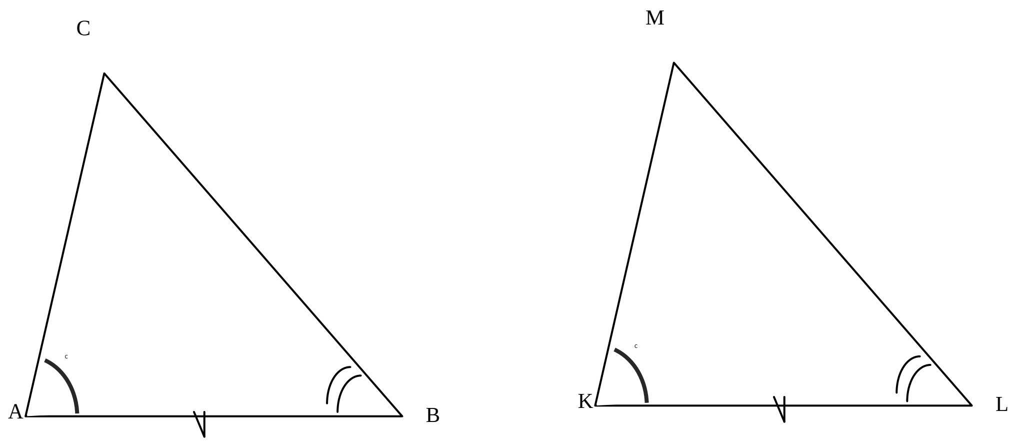


Kita dapat mengatakan bahwa kedua segitiga yaitu ΔABC dan ΔPQR adalah kongruen menurut aturan Sisi Sudut Sisi, dan biasanya ditulis sebagai $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

Perlihatkanlah bahwa $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ Mengapa kongruen dan bagaimana membuktikannya?



Buktikan pula bahwa segitiga ABC dan KLM kongruen, berikan alas an setiap langkahnya.



Bukti

Karena $\angle A = \angle K$ (diketahui)

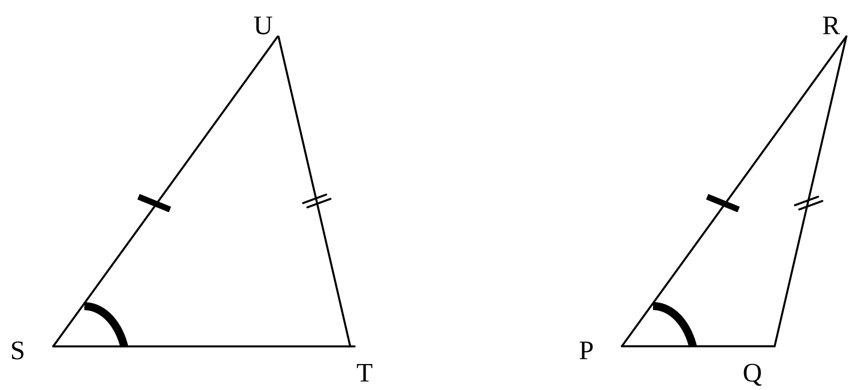
AB = KL (diketahui)

$\angle B = \angle L$ (diketahui)

Maka segitiga ABC kongruen dengan segitiga KLM dengan alas an (Sd-S-Sd).

Tabi anda haruslah hati-hati bahwa Sudt-Sisi-Sisi bukanlah merupakan aturan kekongruenan

Sebab: Kedua segitiga berikut ini memenuhi SU =PR, $\angle S = \angle P$ dan UT = RQ tetapi kedua segitiga tersubut tidak kongruen. Coba selidiki mengapa kedua segitiga itu tidak kongruen?



GARIS SINGGUNG PERSEKUTUAN LINGKARAN, LINGKARAN DALAM DAN LINGKARAN LUAR SEGITIGA

PELATIHAN GURU-GURU MATEMATIKA

DI MANOKWARI

PAPUA BARAT

Oleh:

Drs.Turmudi, M.Ed., M.Sc., Ph.D.

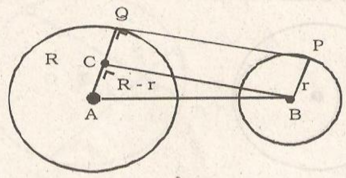
PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2010

GARIS SINGGUNG PERSEKUTUAN LUAR & LINGKARAN DALAM SEGITIGA

Garis singgung persekutuan luar.



Panjang $\overline{PQ} = BC$

ΔABC siku-siku di C

$PQ = BC = \sqrt{AB^2 - (R - r)^2}$

Contoh 1.4 :

Misalkan AB = 25cm, R = 13 cm dan r = 6 cm

Hitung panjang $\overline{AC}$ dan BC serta PQ

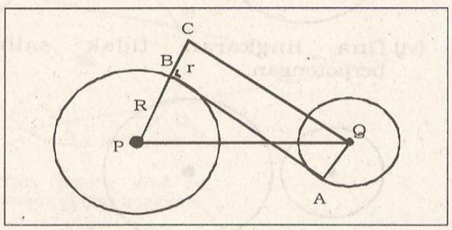
Jawab :

$AC = 13 - 6 = 7$ cm

$BC = \sqrt{AB^2 - (R - r)^2} = \sqrt{25^2 - 7^2}$

$= 24$ cm

$PQ = BC = 24$ cm



Garis singgung persekutuan dalam $\overline{AB}$ merupakan garis singgung persekutuan dalam lingkaran berpusat di P dan Q yang berjari-jari berturut-turut R dan r.

ABCQ merupakan persegi panjang karena $AB = CQ$ dan $CQ = \sqrt{PQ^2 - (R + r)^2}$, maka

$$\boxed{AB = \sqrt{PQ^2 - (R + r)^2}}$$

Contoh 1.5 :

Misalkan PQ = 20 cm, R = 8 cm dan r = 4 cm.

Hitung panjang AB dan luas ABCQ!

Jawab :

a. $AB = \sqrt{PQ^2 - (R + r)^2}$

$= \sqrt{20^2 - (8 + 4)^2}$

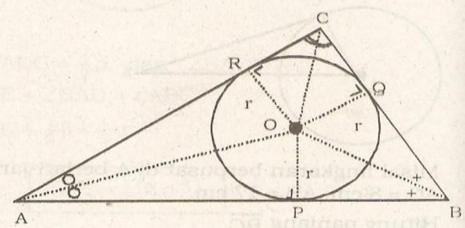
$= \sqrt{400 - 144} = 16$ cm

b. Luas ABCQ $= 16\text{cm} \times 4\text{cm}$

$= 64\ \text{cm}^2$

Untuk melukis garis singgung persekutuan luar dan garis singgung persekutuan dalam pada dua lingkaran akan diberikan pada bagian tugas (pendalaman materi).

6. Lingkaran dalam dan lingkaran luar suatu segitiga



Pusat lingkaran dalam sebuah segitiga dapat diperoleh dengan membuat garis bagi setiap sudut pada segitiga itu.

Luas ABC = L ΔAOB + L ΔBOC + L ΔAOC

$= \frac{1}{2}\, r \times (AB + BC + AC)$

$= \frac{1}{2}\, r \times$ keliling segitiga

$$\therefore r = \boxed{\frac{2 \times \text{Luas ABC}}{\text{Keliling ABC}}}$$

Contoh 1.6 :

Sebuah segitiga sisi-sisinya 15 cm, 12 cm dan 9 cm.

Hitung panjang jari-jari lingkaran dalam

Jawab :

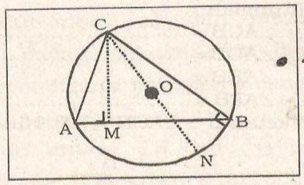
Segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku sebab $15^2 = 12^2 + 9^2$ memenuhi dalil Pythagoras sehingga luasnya $= \frac{12 \times 9}{2} = 54\ \text{cm}^2$

Oleh karena itu $r = \frac{2 \times 54}{(15 + 12 + 9)} = \frac{108\ \text{cm}^2}{36\ \text{cm}^2}$

$= 3$ cm

Pada lingkaran luar segitiga berlaku bahwa

$$\boxed{r = \frac{AB \times BC \times AC}{4 \times \text{Luas}\ \Delta ABC}}$$



Jika A, B, C, terletak pada lingkaran berpusat di O maka lingkaran ini di namakan lingkaran luar ΔABC.

Rumus di atas dapat diperlihatkan sebagai berikut :

$\overline{CN}$ adalah diameter, karenanya $\angle CBN = 90^0$

$\angle BNC = \angle MAC$ (menghadapi busur yang sama, yaitu busur $\widehat{BN}$

Oleh karena itu $\Delta AMC \sim \Delta NBC$ dan

$\frac{AC}{CM} = \frac{CN}{CB} \Leftrightarrow CM = \frac{AC \times CB}{CN}$ ....(1).

CN adalah diameter sehingga CN = 2 x jari-jari

$$\text{Luas } \Delta ABC = \tfrac{1}{2} \times AB \times CM$$

$$= \tfrac{1}{2} \times AB \times \left(\frac{AC \times CB}{CN}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \times \frac{AB \times BC \times AC}{2r}$$

$$\text{Luas} = \frac{AB \times BC \times AC}{4r}$$

$$\text{Jadi} \quad \boxed{r = \frac{AB \times BC \times AC}{4 \times \text{Luas} ABC}}$$

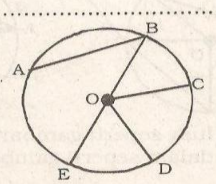
Setelah kamu mempelajari dan untuk lebih memantapkan pengertian Lingkaran II, kerjakanlah tugas dan latihan berikut ini.

B. TUGAS (PENDALAMAN MATERI)

Untuk menjawab no. 1 a — g, perhatikan lingkaran di samping ini :

1. a. Garis lengkung $\widehat{AB}$ pada lingkaran di bawah ini dinamakan ....

....



b. Sedang ruas garis $\overline{AB}$ disebut

....

....

c. Ruas garis $\overline{BE}$ disebut

....

....

d. Jari-jari lingkaran di samping ini dapat diwakili oleh ruas garis ... atau ... atau

....

....

e. Salah satu juring pada lingkaran di atas diwakili oleh juring .... dan ...

....

....

f. Tembereng pada lingkaran di atas dibatasi oleh ... dan ....

....

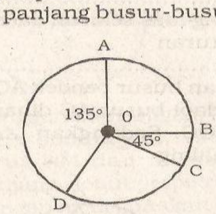
g. Pusat lingkaran berupa titik, yaitu titik

....

....

2. Busur $\widehat{AB}$ panjangnya 4 cm dan menghadapi sudut 90^0

Hitung panjang busur-busur



a. Busur $\widehat{BC}$

....

b. Busur $\widehat{CD}$

....

c. Busur $\widehat{AD}$

....

3. Dengan memperhatikan gambar lingkaran di atas pada nomor 2 ukuran $\angle AOB$ = ... sedangkan ukuran $\angle COD$ = ...

a. Apa yang dapat kamu lihat tentang tali busur $\overline{AB}$ dan tali busur $\overline{CD}$?

....

....

....

....

b. Apakah panjang $\overline{AB}$ dua kali $\overline{BC}$? Berikan alasannya!

....

....

....

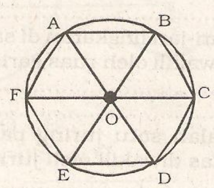
....

....

c. Apakah panjang $\overline{AD}$ tiga kali $\overline{BC}$? Berikan alasannya!

....

4. Pada segi enam beraturan jari-jari $\overline{OA} = \overline{AB}$



a. Berikan alasannya!

....

b. Apabila AD = 14 cm, hitung keliling segi enam beraturan

....

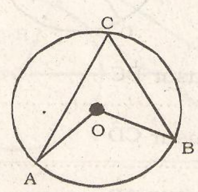
c. Hitung luas daerah ΔAOB dengan terlebih dahulu menghitung jarak O ke garis $\overline{AB}$

....

d. Hitung luas seluruh daerah segi enam beraturan

....

5. Perhatikan busur pendek AC. Sudut yang menghadapi busur AC dinamakan sudut pusat AOC. Sedangkan $\angle ABC$ disebut sudut keliling



a. Jika $\angle AOC = 100^0$, berapa ukuran $\angle ABC$?

....

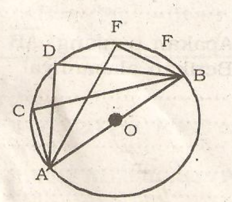
....

b. Jika ukuran $\angle ABC = a^0$ berapa ukuran $\angle AOC$?

....

....

6. AB merupakan diameter, sehingga ukuran $\angle AOB = ...$



Hitunglah

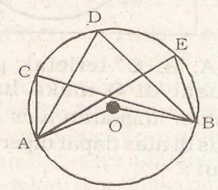
a. $\angle ACB$ = ...

b. $\angle ADB$ = ...

c. $\angle AEB$ = ...

d. $\angle AFB$ = ...

7. Diketahui u $\angle ACB = 70^0$. Hitunglah



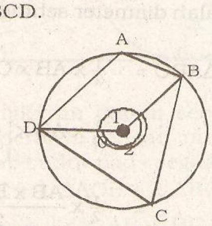
a. u $\angle AOB$ = ...

b. u $\angle ADB$ = ...

c. u $\angle AEB$ = ...

8. Segi empat ABCD merupakan segi empat tali busur apabila, A, B, C, dan D terletak pada lingkaran.

Sekarang kamu akan melihat hubungan antara $\angle C$ dan $\angle A$ pada segi empat tali busur ABCD.



Perhatikan bahwa u $\angle O_1$ = 2 x u $\angle C$ dan u $\angle O2$ = 2 x u $\angle A$, sehingga

u $\angle O_1$ + u $\angle O_2$ = (2 x u $\angle C$) + (2 x $\angle A$)

.... O = 2 x (u $\angle C$ + u $\angle A$)

Jadi u $\angle C$ + u $\angle A$ = $\frac{1}{2} \times ....^\circ$

= ....°

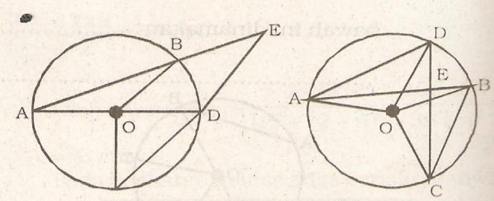
Dengan demikian jumlah sudut yang saling berhadapan adalah = ...0

9. Lihat gambar pada nomor 8, jika u $\angle CDA = 83^0$ Hitung u $\angle ABC$!

....

....

10. Ada beberapa kemungkinan titik potong antara dua tali busur pada lingkaran

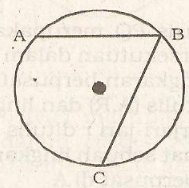


a. Di luar seperti gambar (a)

b. Di dalam seperti gambar (b)

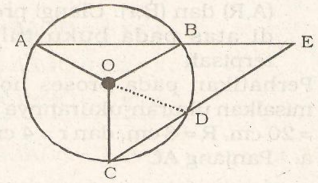
Sudut antara $\overline{AB}$ dan merupakan $\overline{CD}$ pada (a) adalah $\angle AEC$ dengan E berpotongan antara perpanjangan $\overline{AB}$ dan perpanjangan $\overline{CD}$.

Sudut antara $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ pada (b) adalah $\angle AEC$ dengan E titik potong $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$



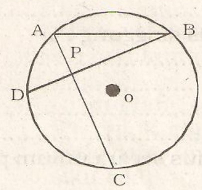
c. Pada lingkaran seperti pada gambar (c) Sudut antara tali busur $\overline{AB}$ dan tali busur $\overline{BC}$ pada (c) adalah sudut ABC dengan B pada lingkaran.

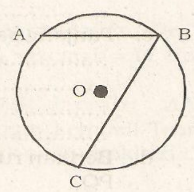
11. Apabila sudut pusat yang menghadap busur-busur diketahui. Dapatkah kamu mencari sudut antara kedua tali busur tersebut?
Diketahui u $\angle AOC = 120^0$ dan u $\angle BOD = 40^0$ Hitung besar u $\angle AEC$, dengan terlebih dahulu menghitung



a. u $\angle BAD$ = ...
b. u $\angle BCD$ = ...
c. u $\angle ADC$ = ...
d. u $\angle ABC$ = ...
e. u $\angle AEC$ = ...

12. Diketahui u $\angle AOD = 46^0$ dan u $\angle BOC = 154^0$. Tentukan!





a. u $\angle ACD$
....
....

b. u $\angle ABD$
....
....

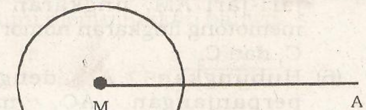
c. u $\angle CAB$
....
....

d. u $\angle APD$
....

e. u $\angle CPB$
....

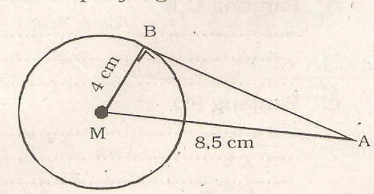
13. Diketahui u $\angle AOB = 84^0$ dan u $\angle BOC = 142^0$. Hitunglah besar sudut!
a. u $\angle AOC$
....
....
b. u $\angle ABC$
....
....

14. Menentukan garis singgung lingkaran dengan pusat M. Titik A berada di luar lingkaran berpusat M berjari-jari r cm.



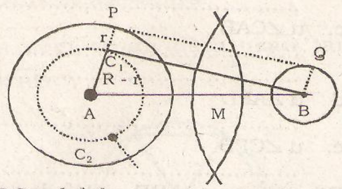
a. Menggunakan jangka, lukislah sebuah garis sumbu AM, yaitu garis tegak lurus AM dan membagi dua sama panjang, sebut perpotongan P.
b. Dengan menggunakan pusat P buatlah busur lingkaran berjari-jari AP = MP
c. Misalkan lingkaran pada butir b memotong busur-busur lingkaran di B dan C
d. Hubungkan AB dan AC, garis-garis ini merupakan garis singgung lingkaran. Mengapa u $\angle ACM = 90^0$?
....
....
....

15. Diketahui AM = 8,5 cm dan BM = 4 cm. Tentukan panjang AB?



....
....
....
....

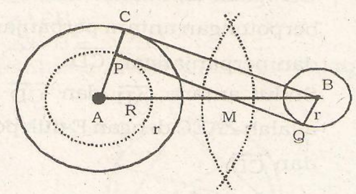
16. Melukis garis singgung persekutuan luar dua lingkaran



(1) PQ adalah garis singgung yang akan dilukis
(2) Lingkaran berpusat di A berjari-jari R dan lingkaran berpusat di B berjari-jari r
(3) Buat lingkaran berpusat A dengan jari-jari R — r
(4) Lukis garis sumbu AB untuk menentukan titik M sedemikian sehingga AM = MB
(5) Lukis lingkaran berpusat di M, dengan jari-jari AM, lingkaran ini akan memotong lingkaran nomor (3) di titik C_1 dan C_2
(6) Hubungkan A dengan C_1, perpanjangan AC_1 memotong lingkaran berpusat A berjari-jari R di titik P
(7) Hubungkan C_1 dan B kemudian buat ruas garis $\overline{PQ}$ sejajar $\overline{C_1B}$, garis $\overline{PQ}$ menyinggung lingkaran (B,r) di titik Q dan $PQBC_1$ berbentuk persegi panjang.
(8) PQ merupakan garis singgung persekutuan luar lingkaran (A,R) dan (B,r). Ulangi proses di atas pada buku tulismu secara terpisah!

17. Perhatikanlah gambar hasil lukisan pada nomor 16 di atas. Jika panjang AB = 15cm, $\overline{AP}$ = R = 9 cm, dan BQ = r = 4 cm. Hitunglah
a. Panjang AC_1
....
....
....
b. Panjang C_1B
....
....
....
c. Panjang PQ
....
....
....
d. Berikan rumus secara umum panjang PQ
....
....
....

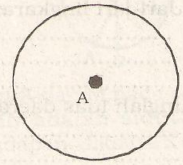
18. Melukis garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran



(1) Garis PQ merupakan garis singgung persekutuan dalam yang akan dilukis
(2) Lingkaran berpusat di A berjari-jari R ditulis (A,R) dan lingkaran berpusat B berjari-jari r ditulis (B,r)
(3) Buat sebuah lingkaran berjari-jari R + r berpusat di A
(4) Buat garis sumbu AB untuk menentukan titik M sedemikian sehingga AM = MB
(5) Lukis sebuah lingkaran berpusat di M dan berjari-jari AM atau MB lingkaran ini memotong lingkaran (3) (A,R+r) di titik C
(6) AC memotong (A,R) di titik P
(7) Hubungkan C dan B, kemudian buat garis PQ sejajar CB dan PQ ini menyinggung lingkaran (A,R) dan (B,r).
(8) PQ merupakan garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran (A,R) dan (B,r). Ulangi proses melukis di atas pada buku tulisan secara terpisah

19. Perhatikan pada proses nomor 18 dan misalkan ukuran-ukurannya diketahui AB = 20 cm, R = 8 cm, dan r = 4 cm. Hitunglah
a. Panjang AC
....
....
....
....
b. Panjang BC
....
....
....
....
c. Panjang garis singgung PQ
....
....
....
....
d. Berikan rumus secara umum panjang PQ
....
....
....

20. Lukislah sebuah garis singgung yang melalui titik pada sebuah lingkaran, kemudian tuliskan prosedur (langkah-langkah) melukis garis singgung tersebut.

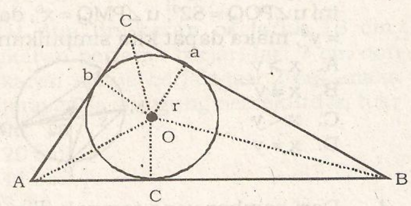


....

....

....

21. Lingkaran (O,r) merupakan lingkaran singgung dalam DABC, yang diperoleh dengan cara membuat garis-garis bagi setiap sudut. Titik potongnya merupakan titik pusat lingkaran singgung dalam. Perhatikan bahwa luas daerah ΔABC merupakan jumlah dari luas daerah ΔAOB + ΔBOC + ΔAOC



Luas $\Delta AOB = \frac{1}{2}$ x r x...

Luas $\Delta AOC = \frac{1}{2}$ x r x...

Luas $\Delta BOC = \frac{1}{2}$ x r x...

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ x r x (... + ... + ...)

Dapat kamu perhatikan bahwa (a+b+c) adalah keliling segitiga ABC sehingga kita peroleh hubungan

2 x Luas DABC = ... x ....

Panjang jari-jari r dinyatakan dalam luas (L) dan keliling (K) adalah r

$= \dfrac{\text{............ × ....}}{\text{............}}$

22. Misalkan segitiga ABC pada no. 20 di atas adalah berukuran a = 8 cm, b = 17 cm dan c = 15 cm.

a. Hitunglah luas daerah ΔABC. [Petunjuk gunakan kembali Teorema Pythagoras untuk menunjukkan $\angle ABC$ siku-siku].

....

....

....

b. Hitung keliling ΔABC

....

....

....

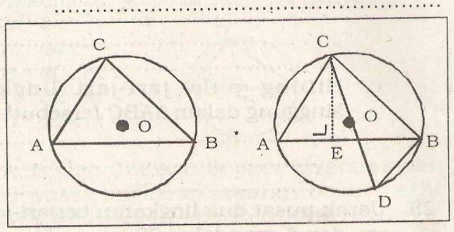
c. Carilah jari-jari lingkaran singgung dalam ΔABC!

....

....

....

23.



Pada gambar 22 (a) diketahui AB = c cm, BC = a cm dan AC = b cm. Jika OA = r cm dan L adalah luas daerah ΔABC. Dapatkah kamu menunjukkan bahwa

$$r = \frac{a \times b \times c}{4 \times L}$$

a. Buat garis tinggi CE dan garis tengah CD, kemudian hubungkan D dan B. Mengapa $\angle CBD$ siku-siku?

....

....

....

b. Berikan alasan mengapa $\angle CAE$ sebangun $\angle CDB$!

....

....

....

c. Karena $\angle AEC$ sebangun $\angle DBC$, sehingga dapat kita peroleh bahwa ΔACE sebangun ΔDCB, oleh karena berlaku perbandingan-perbandingan

$$\begin{aligned} AC : CE &= DC : CB \\ \Leftrightarrow CE \times CD &= AC \times CB \\ CE &= \frac{AC \times CB}{CD} \quad \text{..........(*)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas } \Delta ABC &= \tfrac{1}{2} \times AB \times CE \\ &= \tfrac{1}{2} \times \frac{AB \times AC \times CB}{CD} \\ \Leftrightarrow L &= \frac{a \times b \times c}{2 \times 2r} \quad \text{(sebab CD = 2r)} \end{aligned}$$

$$\text{Akibatnya } r = \frac{abc}{4L}$$

TITIK GARIS DAN SUDUT

PELATIHAN GURU-GURU MATEMATIKA

DI MANOKWARI

PAPUA BARAT

Oleh:

Drs.Turmudi, M.Ed., M.Sc., Ph.D.

PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2010

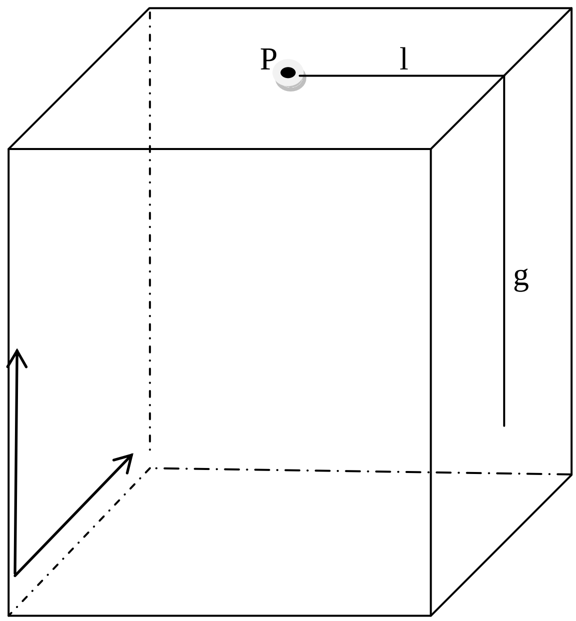
1. Titik, garis dan Sudut

Dalam mempelajari geometri menggunakan pendekatan-pendekatan terkini tidak berangkat dari struktur geometri seperti titik, garis, dan sudut pada bidang dan ruang melainkan berangkat dari konteks, dari fenomena dengan cara melihat unsur unsure itu. Misalkan kita melihat gedung pencakar langit berikut ini.

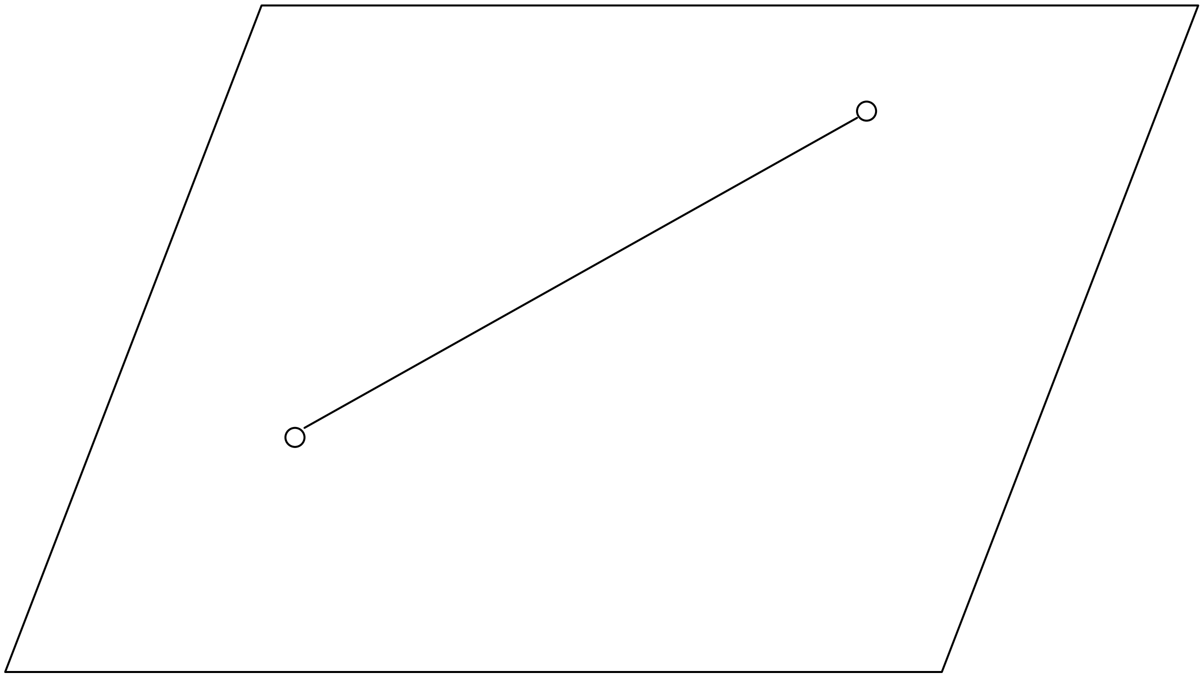
Apbila kita memperhatikan gedung pendakar langit di atas, maka reaksi yang mungkin muncul adalah keindahan, kerapihan, dan kekokohan dari sudut pandang arsitektur. Bahwa di dalamnya harus ada lift, harus ada AC, ada toilet dsb.

Namun dari sudut pandang matematka khususnya geometri, kita dapat memandang bahwa bangun-bangun pencakar langit meliputi kubus dan balok. Sudah barang tentu di dalam kubus atau model kubus dan model balok kita dapat mengidentifikasi titik, garis dan sudut.

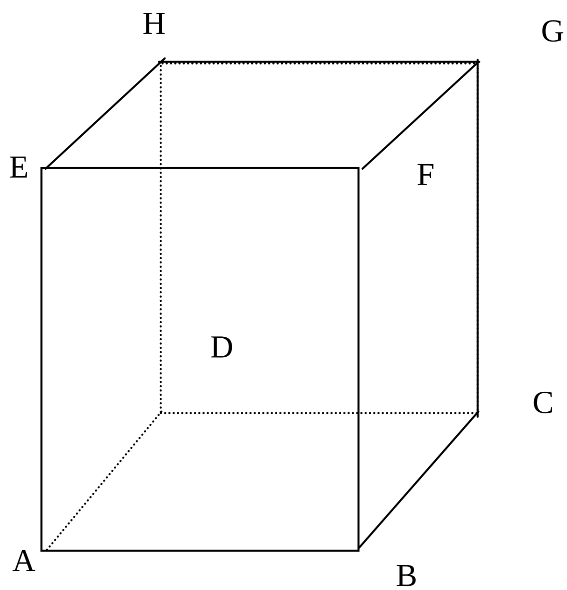
Sebuah lampu, bola lampu, dalam suatu ruangan dapat dipandang sebagai titik (titik materi). Lihat titik P atau lampu P dan garis l dan garis g. Suatu kabel yang menghubungkan bola lampu dengan saklar dapat dipandang sebagai garis (lihat garis l dan garis g). Tepi-tepi sebuah ruang dapat membentuk pojok atau sudut.



Titik, garis dan sudut dikenali melalui pendifinisian formal melainkan melalui pengamatan yang mereka kenali, misalkan lampu P dinenali sebagai titik pada sebuag bidang walaupun titik sebenarnya tidak memiliki ukuran. Kabel l dan g dikenali sebagai garis (atau garis lurus) dan pojokan suatu kubus membentuk sebuah sudut.

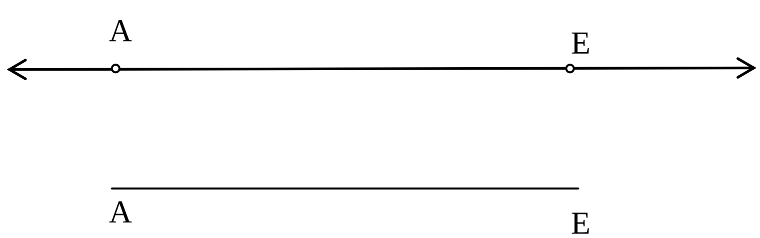


Posisi dua pemain di lapangan sepak bola dapat dipandang sebagai dua titik, kalau dari kedua titik dihubungkan dengan garis terpendek, jadilah segmen garis. Dengan memperhatikan bangun-bangun pencakar langit dan ruangan atau tempat di mana kita berdomisili atau ruangan kelas kita, maka kita dapat mengenali suatu titik, garis, dan sudut



Titik pada bidang atau dalam ruang misalkan titik A, B, C, atau D. Titik M di sepanjang garis AC dan titik O di sepanjang BH

Garis dapat kita kenali misalkan melalui garis AE. Namun kita perlu membedakan garis AE dan segmen garis AE.



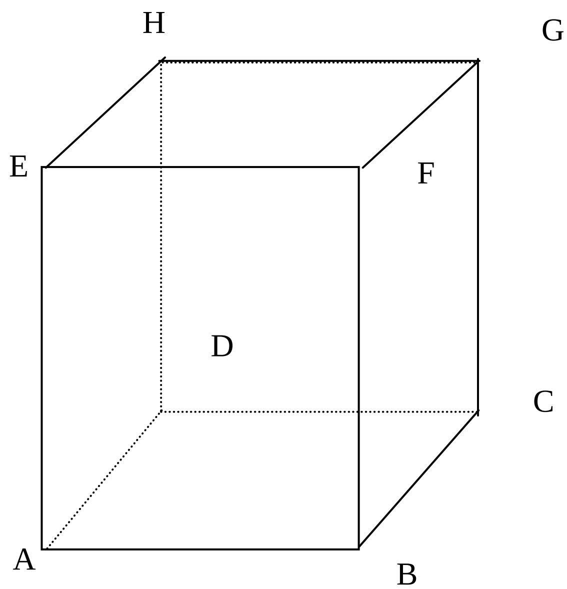
Melalui dua buah titik berbeda di dalam bidang dapat dibuat tepat satu garis lurus.

Sekarang coba anda identifikasikan daudut BDFn kenali sudut yang dapat anda buat pada suatu kubus.

(a) Sudut-sudut apa saja yang dapat anda kenali pada kubus di bawah ini?

(b) Coba anda perlihatkan sudut BAC?

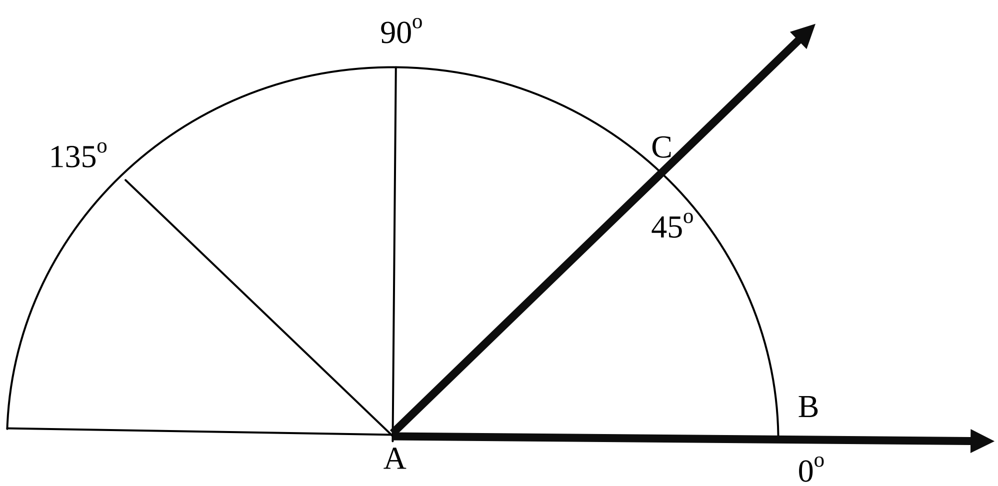
(c) Perlihatkan pula sudut BDF



Dengan memperhatikan kubus anda dapat mengenali sudut BAC yang dapat simbolkan dengan $\angle$BAC atau $\angle$A atau $\angle$CAB.

Untuk mengukur besar sudut digunakan busur derajat.

Berdasarkan hasil pengukuran menggunakan busur derajat. Sudut BAC atau $\angle$BAC ini berukuran 45^o, bukan 135^om, sehingga dapat kita tuliskan sebagai $\angle BAC = 45^o$



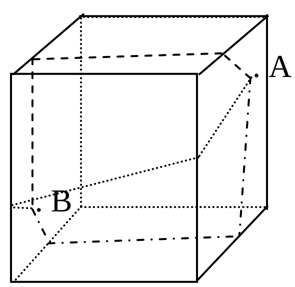
Berdasarkan ukurannya sudut dapat diklasifikasikan sebagai

(a) Sudut lancip
(b) Sudut siku-siku
(c) Sudut tumpul
(d) Sudut lurus

2. Dimensi Tiga

Kemampuan tilikan ruang atau *spatial competency* merupakan bagian tak terpisahkan dari kemampuan matematika yang hendaknya dipelajari oleh siswa di sekolah. Oleh karena itu bagi seorang guru matematika sekolah menengah menjadi suatu kemampuan yang esensial untuk dimiliki. Kemampuan tilikan ruang, kemampuan memahami bagian-bagian dari ruang berupa bidang, garis, titik, sudut, proyeksi, cara menggambar bangun ruang, jarak, sifat-sifat garis sejajar, menentukan titik tembus, menggambar penampang irisan suatu bidang dengan bangun ruang, semuanya merupakan bagian-bagian yang juga harus dimiliki oleh guru dan calon guru matematika.

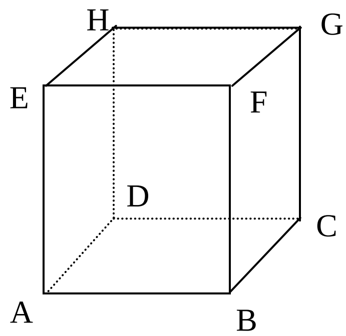
Misalkan bagaimana menentukan jarak antara dua buah titik yang terletak pada kulit kubus, dengan ketentuan jarak dimaksud harus melalui permukaan kubus, di sini memerlukan kemampuan guru mengekspresikan bangun ruang ke dalam bidang, artinya bagaimana guru atau siswa membuat jaring-jaring kubus dan selanjutnya mengkonstruksi posisi di mana jarak antara kedua titik dimaksud menjadi minimum.



Meskipun hal di atas bukan merupakan kemampuan utama untuk dapat memvisualkan tilikan ruang ke dalam bidang, sekurang-kurangnya guru dapat membimbing siswa mengeksplorasi sifat-sifat jarak antara dua titik yang diketahui pada permukaan bangun ruang.

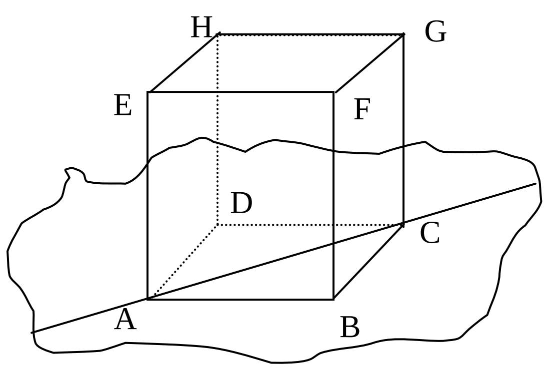
A. Menggambar Bangun Ruang

Unsur-unsur yang harus mendapat perhatian pada saat kita menggambar dan memahami bangun ruang adalah titik, garis, dan bidang, serta hubungannya antara satu dengan lainnya dan posisi dari titik, garis, dan bidang pada ruang berdimensi tiga. Perhatikan kubus di bawah ini.

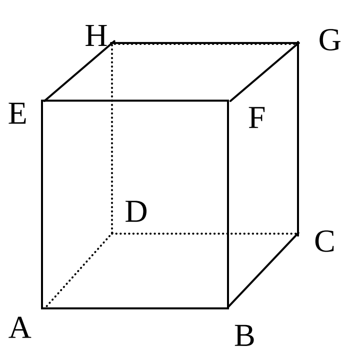


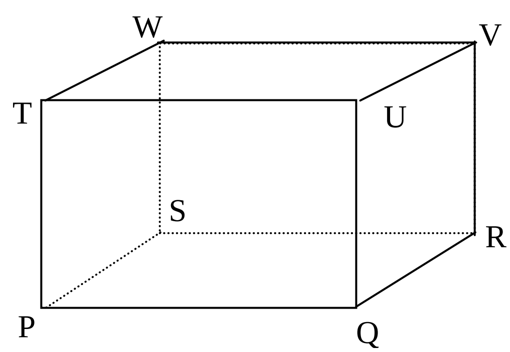
Perhatikan kubus ABCD.EFGH . Titik-titik sudut pada kubus tersebut adalah titik A, B, C, D, E, F, G, dan H. Rusuk-rusuknya adalah $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$, $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{EH}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, dan $\overline{GH}$. Sedangkan bidang-bidang yang membentuk kubus ABCD.EFGH adalah bidang ABCD, ABFE, DCGH, EFGH, ADHE, dan BCGF.

Perhatikan ruas garis $\overline{AB}$ yang dapat diperpanjang ke kiri dan ke kanan sedemikian sehingga terbentuk garis AB yang dinotasikan dengan $\overleftrightarrow{AB}$. Demikian juga bidang ABCD dapat diperluas keseluruh arah yang mungkin asalkan sebidang dengan ABCD



Bangun Ruang Kubus dan Balok





Pada kubus ABCD.EFGH

- Bidang ABFE dan bidang DCGH dikatakan bidang frontal. Bidang frontal adalah bidang yang sejajar dengan bidang gambar.
- Bidang ABCD, ADHE, EFGH dan BCGF dinamakan bidang ortogonal, yaitu bidang-bidang yang tegak lurus bidang gambar.
- Bidang ABCD dan EFGH dinamakan bidang horizontal.
- Perhatikan bahwa meskipun sudut BAD berukuran 90^o, tetapi digambarkan tidak tepat 90^o , melainkan kurang dari 90^o. Sudut yang demikian dinamakan sudut *surut* atau sudut *menyisi*.
- Ruas-ruas garis yang tegak lurus bidang frontal atau bidang gambar dinamakan ruas garis ortogonal.
- Apabila sisi AB atau rusuk AB = a cm, pada gambar sesungguhnya rusuk AD tidak digambarkan persis a cm, melainkan lebih pendek dari a cm. Andaikan AD = x cm dan $x < a$, perbandingan antara x dengan a dinamakan *perbandingan proyeksi* atau *perbandingan ortogonal*. Sehingga untuk gambar di atas perbandingan proyeksinya adalah x/a

Coba anda sebutkan keterangan-keterangan pada balok PQRS.TUVW tentang:

(a) Bidang-bidang frontal

(b) Bidang-bidang ortogonal

(c) Bidang-bidang horizontal

(d) Sudut-sudut surut

(e) Ruas-ruas garis ortogonal

(f) Garis-garis vertikal

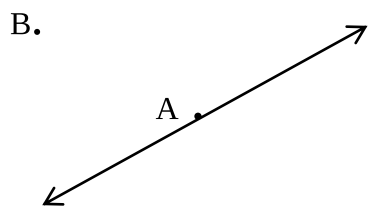
(g) Garis-garis horizontal

Kedudukan Titik terhadap Garis

Ada dua kemungkinan posisi titik pada suatu ruas garis, yaitu titik terletak pada garis dan titik terletak di luar garis.

Misalkan titik A terletak pada garis g

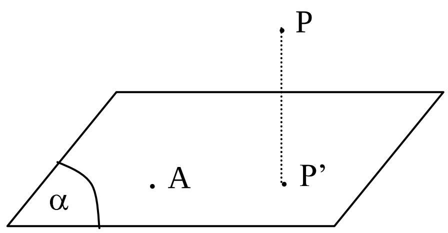
Titik B terletak di luar garis g



Pada kubus ABCD.EFGH titik H terletak pada garis $\overleftrightarrow{HG}$, tetapi titik D di luar garis $\overleftrightarrow{EG}$. Coba anda sebutkan tiga buah titik yang terletak di luar garis PV pada balok PQRS.TUVW

Kedudukan titik terhadap Bidang

Ada dua kemungkinan kedudukan titik pada sebuah bidang, yaitu titik terletak pada bidang atau titik terletak di luar bidang.



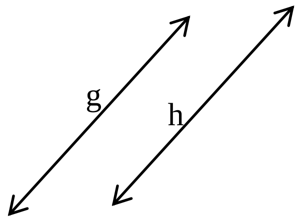
Titik A terletak pada bidang α, tetapi titik P terletak di luar bidang α. Proyeksi titik P pada bidang α adalah titik P'

Pada kubus ABCD.EFGH, jika M titik potong antara $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$, maka M terletak pada bidang ABCD, tetapi titik E, F, dan H tidak terletak pada bidang ABCD. Coba anda sebutkan titik-titik yang terletak pada bidang PQUT dan titik-titik yang terletak di luar bidang SRVW pada balok PQRS.TUVW

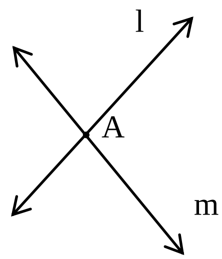
Kedudukan garis Terhadap garis lain

Kedudukan garis terhadap garis lain terdapat beberapa kemungkinan antara lain:

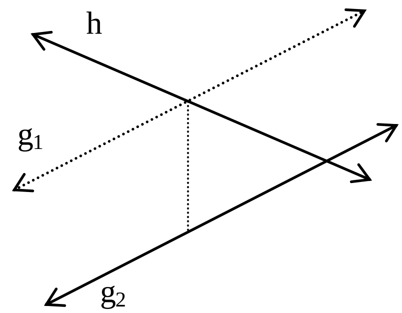
Dua garis saling sejajar
Dua garis saling berpotongan di satu titik
Dua garis berimpit
Dua garis saling bersilangan.



Garis g // h

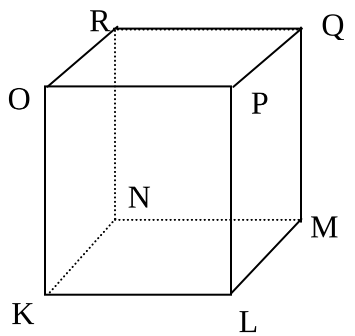


Garis l dan m berpotongan di titik A



$g_1 // g_2$, g_1 berpotongan dengan h, dan g_2 tidak terletak pada bidang yang memuat g_1 dan h, maka g_2 dikatakan bersilangan dengan h.

Contoh:



Diketahui kubus KLMN.OPQR

(a) Sebutkan tiga pasang garis yang sejajar
(b) Sebutkan empat garis yang saling berpotongan
(c) Sebutkan pasangan garis yang saling bersilangan

Jawab:

(a) KO // LP, KL // NM, dan OR // LM
(b) OQ berpotongan dengan RP; KR berpotongan dengan ON; PM berpotongan dengan QL, dan RL berpotongan dengan PL
(c) RP bersilangan dengan KL; KM bersilangan dengan PQ dan OR bersilangan dengan MN

Untuk dua garis sejajar, apabila jarak antara kedua garis tersebut adalah nol, maka kedua garis ini dinamakan saling *berimpit.*

Untuk dua garis yang saling berpotongan, ada dua kemungkinan yaitu berpotongan tegak lurus dan berpotongan tidak tegak lurus. Demikian juga dua garis yang bersilangan dapat bersilangan tegak lurus atau bersilangan tidak tegak lurus. Dapatkah anda menentukan pasangan-pasangan garis yang saling berpotongan tegak lurus dan bersilangan tegak lurus pada kubus ABCD.EFGH? Coba anda sebutkan pasangan-pasangan tersebut.

Kedudukan Garis terhadap bidang

Beberapa kemungkinan kedudukan garis terhadap bidang antara lain:

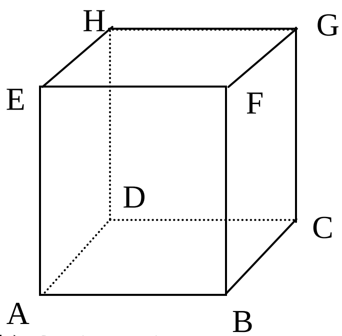
Garis terletak pada bidang

Garis sejajar bidang

Garis menembus bidang (berpotongan dengan bidang hanya pada satu titik saja)

Contoh:

Perlihatkanlah tiga keadaan di atas untuk kubus ABCD.EFGH



(a) Sebutkan garis yang terletak pada bidang ABFE
(b) Sebutkan garis-garis yang menembus bidang ACGE
(c) Sebutkan garis yang sejajar bidang BCGF

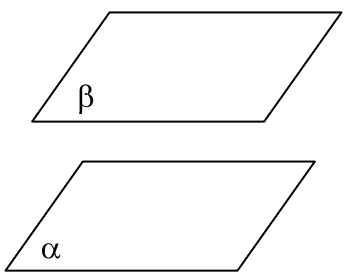
Jawab:
(a) AE, BE, dan AF adalah garis-garis yang terletak pada bidang ABFE

(b) Garis-garis yang menembus bidang ACGE antara lain garis DF dan HB, atau garis FM di mana M adalah titik tengan DH.

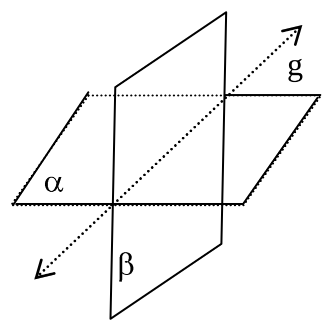
(c). Garis-garis sejajar bidang BCGF di antaranya: HE, DH, AH, atau DE.

Kedudukan bidang terhadap bidang lain

Kedudukan bidang terhadap bidang lain kemungkinannya adalah keduanya sejajar atau keduanya berpotongan pada satu garis, atau kedua bidang berimpit.

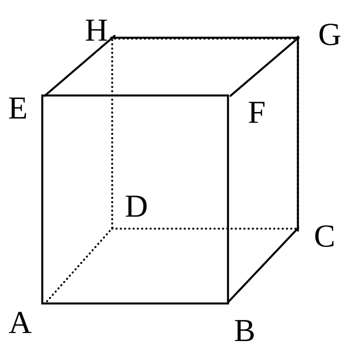


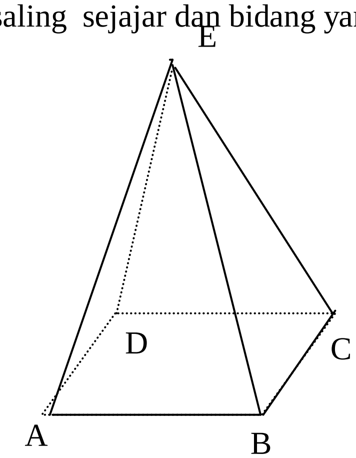
Bidang α dan β saling sejajar ditulis α//β



Bidang α dan β berpotongan di sepanjang garis g

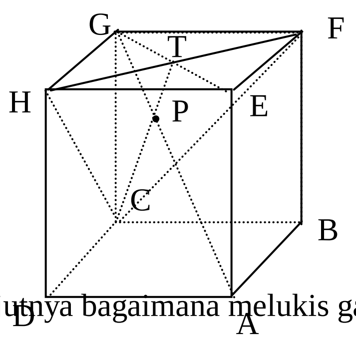
Coba anda selidiki bidang-bidang yang saling sejajar dan bidang yang saling berpotongan pada kubus dan limat di bawah ini!





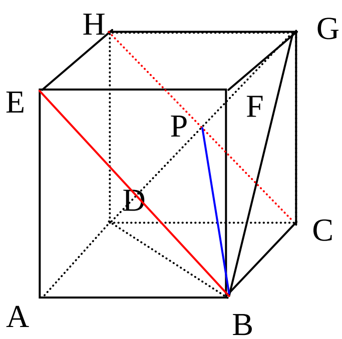
Melukis Titik Tembus Garis pada Bidang dan Garis Perpotongan Dua Bidang

Misalkan ABCD.EFGH adalah sebuah kubus, bagaimana melukis titik tembus antara AG dengan bidang CFH



(a) Buat bidang CHF, misalkan HF dan GE berpotongan di titik T
(b) Hubungkan C dan T
(c) Perpotongan antara CT dan AG merupakan titik tembus AG pada bidang CFH
(d) Titik P merupakan titik tembusnya

Selanjutnya bagaimana melukis garis ynag merupakan perpotongan antara dua buah bidang?

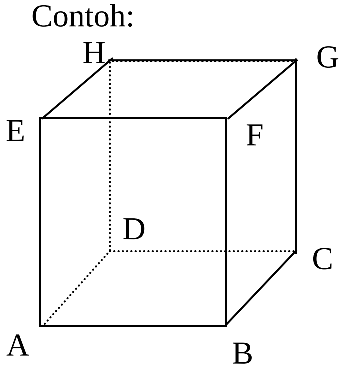


Contoh:
Lukislah garis yang merupakan perpotongan antara bidang BCHE dan bidang BDG pada kukus ABCD.EFGH!
Jawab:
Misalkan P adalah titik potong antara DG dan CH. Dapat anda lihat bahwa BP terletak pada bidang BCHE maupun pada bidang BDG, sehingga BP merupakah garis persekutuan antara bidang BDG dan bidang BCHE.

I. Sudut dan bidang dalam kaitannya dengan menggambar Bangun Ruang

Sudut-sudut antara rusuk dan diagonal ruang, maupun diagonal bidang sisi dapat diperlihatkan seperti pada gambar kubus berikut ini. Demikian pula sudut yang dibentuk oleh garis dan bidang serta sudut antara bidang dengan bidang.

Contoh:

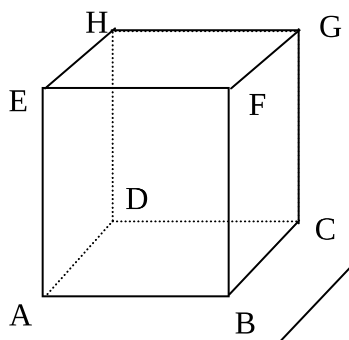


Pada kubus ABCD.EFGH perlihatkanlah sudut yang dibentuk oleh
(a) AC dan CE
(b) AH dan DG
(c) BD dan EF

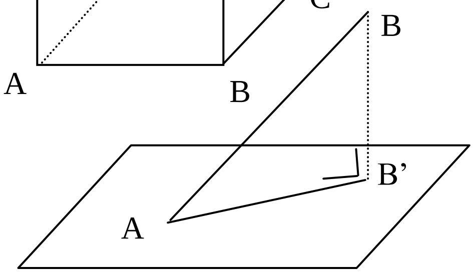
Jawab:
(a) Sudut antara AC dan CE adalah $\angle$ ACE
(b) Sudut antara AH dan DG adalah $\angle$ FAH, sebab DG //AF
(c) Sudut antara BD dan EF adalah $\angle$ ABD, sebab EF // AB.

Contoh:

Lukislah sudut antara AG dan bidang BDHF pada kubus ABCD.EFGH



Jawab:
Misalkan AC dan BD berpotongan di titik M dan AG menembus bidang BDHF di titik P
Perhatikan bahwa MP merupakan proyeksi AP pada bidang BDHF, sehingga sudut antara AG dan bidang BDHF adalah $\angle$ APM



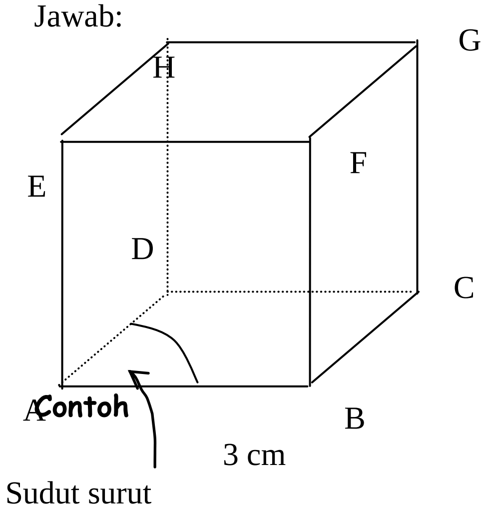
Catatan: Proyeksi AB pada bidang α jika A terletak pada bidang α adalah garis AB’ di mana B’ adalah proyeksi B pada bidang α, artinya BB’ tegak lurus bidang α

Hingga saat ini anda telah mengenal pengertian bidang frontal, ortogonal, horizontal, sudut surut, perbandingan proyeksi. Coba anda gunakan pengertian-pengertian tadi untuk menggambarkan bangun ruang (kubus) berikut ini.

Contoh:

Gambarkanlah sebuah kubus ABCD.EFGH dengan ukuran rusuk 3 cm , bidang ABFE frontal, besar sudut surut 40^o dan perbandingan proyeksi ½

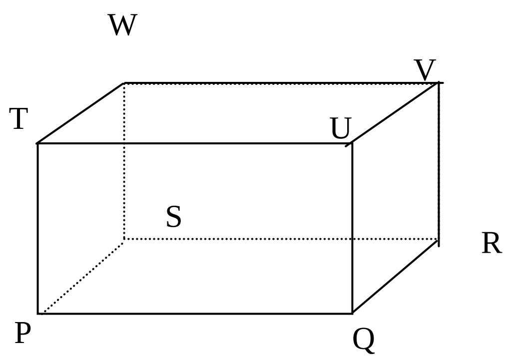
Jawab:



Bidang ABFE adalah bidang frontal dan ukurannya sesuai dengan ukuran sesungguhnya bersisi 3 cm.
Rusuk AD berukuran 1 ½ cm, sebab perbandingan proyeksinya ½ dan ½ x 3 cm = 1 ½ cm.
Sudut BAD merupakan sudut surut dengan ukuran sesungguhnya 40^o. Bidang alasnya meskipun merupakan persegi, tampak sebagai jajar genjang yang tidak bersudut siku-siku. Ruas garis AD, CD, dan DH digambarkan sebagai ruas garis yang putus-putus.

Gambarkanlah sebuah balok PQRS.TUVW dengan bidang PQUT adalah bidang frontal, PQ = 6 cm PT = 2 cm dan PS = 4 cm dengan sudut surut QPS = 45^{o} dan perbandingan proyeksi ¾ cm

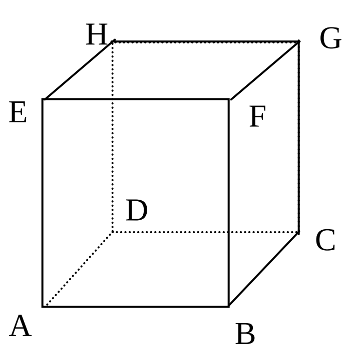
Jawab:

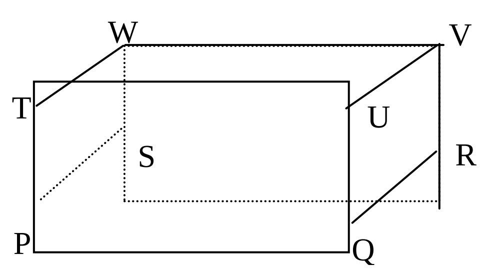


Ukuran-ukuran pada gambar
PQ = 6 cm (frontal)
PT = 2 cm (frontal)
PS = ¾ x 4 cm = 3 cm (menggunakan perbandingan ortogonal)
$\angle$ QPS = 45^{o}

Latihan 1.1

1. Gambarkanlah sebuah kubus dengan rusuk 3 cm dan ADHE merupakan bidang frontal, sudut surut ADC berukuran 60^{o} dengan perbandingan proyeksi 1/3. Sebutkanlah
   (a) Garis-garis yang orthogonal
   (b) Garis-garis yang horizontal
   (c) Bidang-bidang orthogonal
   (d) Bidang-bidang yang horizontal
   (e) Pasangan bidang yang frontal.
2. Pada kubus yang digambar pada no 1 di atas, sebutkanlah
   (a) Tiga titik yang terletak di luar garis AE
   (b) Dua titik pada garis AG
3. Apabila titik A pada kubus ABCD.EFGH diproyeksikan pada bidang CDHG, tentukanlah hasil proyeksinya





4. Tentukan proyeksi segmen garis SU dari balok PQRS.TUVW pada bidang-bidang berikut ini:
    a. PQUT
    b. PQRS
    c. QUVR
    d. PSWT
5. Dari balok pada No. 4 di atas tuliskan
    a. tiga pasang ruas garis yang berpotongan
    b. tiga pasang ruas garis yang berpotongan tegak lurus
    c. tiga pasang ruas garis yang bersilangan
6. Pada kubus ABCD.EFGH Berapakah besar sudut antara
    a. HF dan AB
    b. EG dan BD
    c. DF dan HE
    d. BH dan EF
7. Pada kubus ABCD.EFGH, lukislah titik tembus
    a. DF pada ACGE
    b. BH pada ACF
    c. CE pada BDE
8. Tentukanlah besar sudut antara garis-garis yang diketahui pada kubus ABCD.EFGH dengan bidang-bidang yang disebutkan.
    a. AC dengan BDHF
    b. CD dengan ADHE
    c. AG dengan ABCD
    d. BH dengan ACGE
9. Carilah garis yang merupakan perpotongan antara
    a. Bidang PQRO dengan KORN
    b. Bidang KLQR dengan MNRQ
    c. Bidang RQL dengan LPRN
    d. Bidang KMP dengan PMR
10. Lukislah sudut antara garis dan bidang yang diketahui pada kubus:
    a. DF dan ACGE
    b. BM dan EFGH bila M titik potong EG dan HF
    c. CE dan ABFE

PENGEMBANGAN EVALUASI PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Oleh: Drs. Turmudi, M.Ed., M.Sc., Ph.D.

Pendidikan Matematika

FPMIPA UPI

2010

PENGEMBANGAN EVALUASI PEMBELAJARAN MATEMATIKA

A. Penilaian dan Prinsip-prinsip assessment

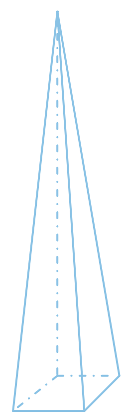
Penilaian pembelajaran matematika pada dasarnya dilaksanakan dengan tujuan untuk memperbaiki proses pembelajaran di tingkat mikro (di kelas). Evaluasi dalam proses pembelajaran adalah suatu proses pemilihan, pengumpulan, dan penganalisisan informasi yang selanjutnya digunakan untuk pengambilan keputusan dan pelaporan.

Selain yang kita kenal dengan evaluasi **formatif** (pembentukan pengetahuan) dan evaluasi **sumatif** (pengujian sejauh mana pencapaian pengetahuan seorang siswa untuk kurun waktu 1 semester atau 1 tahun), dikenalkan juga jenis penilaian "*authentic*" dan *portofolio assessment***.**

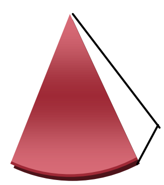
Proses evaluasi hendaknya menjadikan siswa mampu mendemonstrasikan apa yang siswa tahu daripada hanya sekedar menguji apa yang mereka tidak tahu. Penilaian hendaknya mengoperasionalkan semua tujuan pendidikan matematika. Kualitas penilaian matematika tidak ditentukan oleh *accessibilitasnya* untuk tujuan pemberian skor.

Berkaitan dengan proses penilaian daya matematika (*mathematical power*) siswa, daya matematika siswa didefinisikan sebagai kemampuan siswa "mengeksplorasi, membuat alasan secara logis, serta kemampuan menggunakan bermacam-macam metode matematika secara efektif untuk menyelesaikan masalah-masalah non-rutin (Romberg & Wilson, 1995). Istilah ini didasarkan kepada pemahaman bahwa matematika adalah lebih dari hanya sekedar kumpulan pengetahuan serta keterampilan yang harus dikuasai siswa. Mengerjakan matematika termasuk kegiatan terpadu dan dinamis**,** seperti penemuan, eksplorasi, konjektur, serta memahami pembuktian. Siswa yang memiliki *mathematical power* hendaknya memiliki kemampuan untuk meneliti, menyampaikan alasan, mengkomunikasikan gagasan, serta menggunakan soal-soal matematika dalam konteks nyata. Lebih lanjut lagi bagi individu, kekuatan matematika melibatkan pengembangan percaya diri siswa (Romberg & Wilson, 1995).

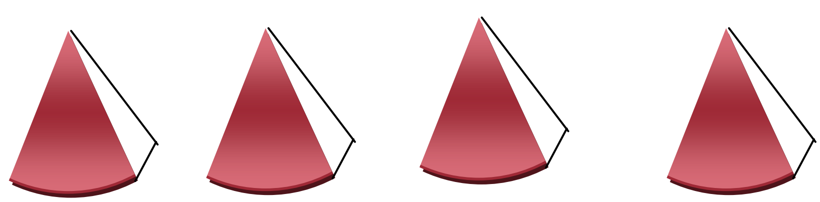
Ketika seorang siswa menemukan suatu aturan bahwa volume bola data dicari dengan menggunakan pendekatan limas-limas, bagi orang tertentu hal ini dapat dipandang sebagai suatu konjektur. Bagaimana kita mencari volume bola kok menggunakan pendekatan volume limas. Ada persyaratan misalkan siswa hendaknya terlebih dahulu telah mengetahui bahwa luas daerah permukaan bola adalah $4\pi r^2$



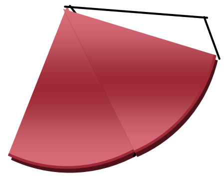
Meskipun agak sulit mengkaitkan limas dengan bola, kiranya kepada siswa dapat dihadapkan dengan irisan-irisan “semangka”.



Apabila irisan-irisan semangka ini digabungkan apa yang dapat siswa bayangkan?

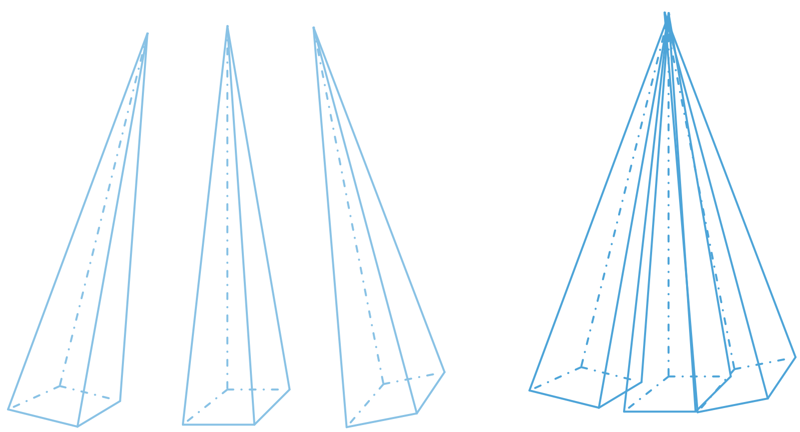


Mungkin akan muncul berbagai interpretasi siswa. Salah satu interpretasinya adalah bahwa bangun yang terjadi akan berbentuk. Dapatkah siswa membayangkan bahwa sejumlah limas akan dapat secara tepat membentuk sebuah semangka.



Pemikiran ini digunakan untuk membayangkan bahwa bola dapat dibentuk dari sejumlah ”limas-limas” kecil. Memang ada sedikit keanehan, bahwa alas dari ”limas” itu lengkung karena merupakan lengkungan kulit bola.

Namun apabila dibuat limas-limas yang sangat banyak, maka alas limas akan mendekati datar, sehingga ‘limas’ tersebut dapat dipandang sebagai limas yang sesungguhnya dengan luas alasnya kita padang sebagai A_i dan tinggi limas adalah R, yang merupakan jari-jari bola.



Apabila pemahaman siswa telah sampai bahwa “bola dapat dibentuk menjadi sejumlah tak terhingga limas-limas kecil” selanjutnya siswa dapat mengumpulkan data dan informasi untuk mengetahui volume bola dengan jari-jari sebesar R.

Informasi yang diperlukan antara lain adalah bahwa:

(i). Luas permukaan bola dengan jari-jari R adalah $A_i = 4\pi r^2$

(ii). Volume sebuah limas adalah V_i = 1/3 x Luas alas x tinggi atau $V_i = 1/3 \times A_i \times R$

(iii) Untuk penjumlahan sampai tak terhingga digunakan konsep limit.

Misalkan $V_{bola} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \ldots + V_{n-1} + V_n$

$= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \ldots + V_{n-1} + V_n$

$= (1/3xA_1xR)+(1/3xA_2xR)+(1/3xA_3xR)+(1/3xA_4 \times R) \ldots +(1/3 \times A_n \times R)$

$= 1/3\ R \times (A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots +A_n)$
$= 1/3\ R \times (4\pi R^2)$

Setelah sampai ke dalam bentuk ini, siswa akan memberikan rumusan yang sederhana bahwa volume sebuah bola berjari-jari R adalah $4/3\ \pi R^3$

Karenanya rumus volume sebuah bola tidak lagi diterima sebagai hal yang sudah jadi, melainkan ada suatu keniscayaan hendaknya siswa melakukan penyelidikan dengan terlebih dahulu mengamati seperti pada pengamatan buah semangka. Tentu *mathematical power* yang dimiliki siswa yang dapat melakukan sendiri seperti akan jauh lebih kuat daripada siswa yang hanya diberitahu bahwa volume sebuah bola adalah $4/3\ \pi R^3$

Keraguan awal "jangan-jangan irisan semangka yang berbentuk 'limas-limas' ini akan dapat dibentuk kembali menjadi semangka utuh atau 'model bola' dan ternyata ini benar". Secara visual siswa dapat memperlihatkannya menggunakan model bola yang berbentuk buah semangka dan secara matematis dengan menggunakan konsep luas permukaan bola, menggunakan volume limas dan menggunakan konsep limit akhirnya siswa dapat membangun konsep volume bola tidak hanya menerima secara dogmatis bahwa volume bola adalah $4/3\ \pi R^3$

Perolehan pengetahuan seperti di atas berkaitan dengan *authentic assessment.* Istilah *authentic assessment* dipilih untuk memberikan dua gagasan. Karena kata *authentic* bermakna "*confirming to reality: trustworthy*", maka penilaian prestasi siswa hendaknya merupakan indikator terpercaya dari kekuatan matematika misalkan seberapa kuat seorang siswa mampu menyelesaikan soal *non-rutin*. Di dalam paradigma konvensional sering kali penilaian kental dengan nuasa politis, karenanya penilaian cenderung "*in-authentic*", tidak melukiskan kemampuan siswa yang sesungguhnya, meskipun belum ada bukti hasil penelitian bahwa hasil penilaian patut diteliti kembali secara seksama.

Beberapa fokus penilaian matematika akan menanyakan apa saja yang dinilai dan teknik-teknik apa yang digunakan untuk menilai.

Berkaitan dengan aspek-aspek apa saja yang dinilai, daftar berikut ini menggambarkan aspek-aspek yang dinilai.

- ❖ Pemahaman konsep
- ❖ Keterampilan pemecahan masalah
- ❖ Keterampilan kerja kelompok
- ❖ Pengetahuan
- ❖ Kemampuan menerangkan dan mengkomunikasikan matematika
- ❖ Percaya diri
- ❖ Kebiasaan bekerja
- ❖ Antusiasme

Teknik-teknik yang dapat digunakan untuk penilaian pembelajaran dapat dikategorikan sebagaimana dalam tabel di bawah ini

Tabel 5.1: Teknik penilaian yang dapat digunakan untuk menggali data tentang prestasi siswa (dimodifikasi dari Marsh dan Willis, 1995:260).

Teknik	Diagnostik	Formatif	Sumatif
Observasi informal dan rekaman tigkah laku siswa	Catatan Anekdotal Sejarah kasus Ceklis Skala penilaian Teknik yang tidak obstrucsive	Catatan Anekdotal Sejarah kasus Ceklis Skala penilaian Teknik yang tidak obstrucsive	Catatan Anekdotal Sejarah kasus Ceklis Skala penilaian Teknik yang tidak obstrucsive
Pengumpulan informasi dari siswa secara informal	Minat inventori Skala oleh siswa Kuesioner	Minat inventori Skala oleh siswa Kuesioner	Minat inventori Skala oleh siswa Kuesioner

	Wawancara Sosiogram Laporan-diri	Wawancara Sosiogram Laporan-diri	Wawancara Sosiogram Laporan-diri
Analisis contoh pekerjaan siswa	Proyek individu Proyek kelompok Analisis isi buku kerja siswa Buku catatan dan jurnal	Proyek individu Proyek kelompok Analisis isi buku kerja siswa Buku catatan dan jurnal	Proyek individu Proyek kelompok Analisis isi buku kerja siswa Buku catatan dan jurnal
Testing (Ujian) bagi siswa	Tes pilihan ganda Tes Standar Tes uraian Diferensial Semantik Skala sikap Teknik proyektif	Tes pilihan ganda Tes estándar Tes uraian Diferensial Semantik Skala sikap Simulasi dan bermain peran	Tes pilihan ganda Tes estándar Tes uraian Diferensial Semantik Skala sikap Simulasi dan bermain peran

Selain teknik-teknik penilaian di atas, dan teknik penilaian *Authentic Assessment* masih ada satu lagi yaitu *Portfolio Assessment*.

Untuk dapat memahami apa yang dinilai dan teknik-teknik apa saja yang dapat dilakukan, akan diuraikan beberapa asumsi dan pembaharuan dalam cara-cara menilai pemahaman dan prestasi belajar siswa.

B. Beberapa asumsi tentang hakekat matematika

Sistem *authentic assessment* di sekolah hendaknya mulai dengan suatu visi tentang hakekat matematika yang dipahami dalam paradigma baru. Asumsi yang mendasari sistem penilaian yaitu dengan membuat sekumpulan item tes atau tugas dan akan menjadi indikator yang sah bagi siswa yang memahami aspek-aspek matematika. Bodin (1993) memberikan argumentasi bahwa seseorang tak akan pernah mengetahui pemahaman siswa sesungguhnya. Seseorang hanya bisa membuat inferensi(kesimpulan) berdasarkan kepada jawaban siswa yang dicatat dan diadministrasikan. Hal ini berimplikasi bahwa seleksi dan penciptaan alat tes sangat krusial dalam proses penilaian. Secara khusus hasil penilaian hendaknya merefleksikan pentingnya aspek matematika bagi seorang siswa yang berkesempatan belajar matematika. Muncul suatu pertanyaan:

“Apa yang dimaksud dengan memahami matematika?” Jawaban atas pertanyaan ini adalah berada pada jantung pengembangan “penilaian autentik”.

Dalam tes standar yang berparadigma tradisional, tes matematika dibuat dengan mengikuti suatu model pengukuran tertentu. Tes yang demikian dibuat dari

- pernyataan yang *independent*,
- pertanyaan-pertanyaan yang diskrit dapat dijawab secara cepat,
- semua item dipandang ekivalen,

-

- jawaban-jawabannya (biasanya diturunkan dari pilihan di antara beberapa alternatif) dinilai sebagai benar atau salah, dan
- jawaban-jawaban hendaknya memiliki konsistensi secara internal.

Menurut paradigma seperti di atas, penilaian mencerminkan pentingnya variasi jawaban siswa dengan adil untuk semua peserta tes. Tes yang demikian biasanya dibuat dan dipilih yang sesuai serta merefleksikan konsep dan prosedur khusus dengan mempertimbangkan urutan logis, serta urutan *hirarkis d*ari konsep dan prosedur matematika dan biasanya didukung oleh uji *face validity* oleh seorang guru ataupun pendidik matematika.

Terkait dengan realibilitas tes, maka item yang terlalu mudah, item yang terlalu sukar, dan item yang tidak berkorelasi dengan item-item lain dibuang, kemudian koefisien internal konsistensi dihitung.

Menghitung jawaban yang benar dari sistem tes seperti ini diasumsikan sebagai indikator penguasaan pengetahuan seseorang terhadap matematika, dan perbedaan jawab benar di antara siswa dipandang sebagai perbedaan pengetahuan siswa.

Penyebutan *authentic assessment* yang didasarkan kepada pendirian (keyakinan) dengan cara menghitung banyak jawab yang benar dari sejumlah pertanyaan singkat ternyata bertentangan dengan pandangan bahwa matematika adalah disiplin intelektual. Misalkan Ernest(1991) memberikan argumen bahwa matematika tidak dapat dideskripsikan hanya dengan struktur *hierarchical* yang unik, dan tidak dapat direpresentasikan oleh sekumpulan komponen pengetahuan yang diskrit.

Ahli matematika Thurston (1990) mengatakan “matematika bukanlah suatu pohon palm yang memiliki cabang tunggal yang menjulang dan panjang, yang dipenuhi rumus-rumus. Matematika bagaikan pohon banyan (nama umum pohon besar di India, sejenis Mulberry, termasuk ke dalam famili Moraceae dan diklasifikasikan sebagai Ficus benghalensis). Pohon ini memiliki banyak cabang dan ranting yang dapat tumbuh menjadi hutan lebat mengundang kita untuk memanjat pohon tersebut dan mengeksplorasinya”.

Karenanya matematika bukan pengetahuan prosedural yang linear, yang prosedurnya sudah terstruktur secara rapi dan ketat. Perumpamaan bagaikan pohon ‘bayan’ menandakan bahwa matematika memiliki banyak cabang dan ranting mengundang kita untuk melakukan penelitian dan penyelidikan sehingga mewujudkan pengetahuan matematika secara lengkap.

Sistem yang sah untuk menilai matematika mestinya mencerminkan paham ini bahwa matematika adalah sekumpulan gagasan yang kaya dan saling terkait satu dengan lainnya.

Agar sesuai dengan pemikiran yang seperti ini hendaknya dimunculkan pandangan bahwa matematika sebagai suatu hasil budaya yang dinamis, dan secara terus menerus berkembang semakin luas sebagai hasil kreasi manusia (Ernest,1988).

Mengerjakan matematika termasuk di dalamnya aktivitas yang dinamis dan terpadu sebagai temuan, eksplorasi, konjektur, *make sense* serta pembuktian. Siswa yang matematikanya *powerful* (kuat) hendaknya mampu melakukan investigasi dan menyampaikan penalaran, mengkomunikasikan gagasan, dan mempertimbangkan soal-soal yang kontekstual. Ini yang oleh Freudenthal (1991) dikatakan sebagai aktivitas kehidupan manusia.

Secara tradisional konsep penilaian (asesmen) disamakan dengan asesmen tradisional. Hal ini rupanya masih mempengaruhi bagaimana guru mempraktekkan penggalian tentang bagaimana siswa memperoleh pengetahuan. Dengan pengertian penilaian secara tradisional ini, apa yang diujikan kepada siswa benar-benar murni prestasi akademik terutama pengetahuan mereka pada topik-topik yang tertulis pada buku teks, agar terampil memecahkan masalah-masalah rutin dan konvensional. Bagaimana cara mereka diuji kemudian diadministrasikan dalam waktu (blok waktu) singkat dengan alat yang terbatas (pensil dan kertas, tes tulis), tempatnya terbatas hanya di dalam kelas dengan tujuan utama yang penting adalah untuk memberikan nilai (grade) dan pelaporan (buku raport) hasil belajar siswa.

Konsepsi baru tentang *assessment* lebih luas, dan lebih jauh di atas batas-batas penilaian konvensional. Konsepsi penilaian dalam pandangan yang lebih modern diungkapkan oleh NCTM (1995) melalui *assessment standards for school mathematics* yang didefinisikan sebagai "proses pengumpulan bukti tentang pengetahuan siswa, kemampuan yang digunakan serta perubahan pemahaman dalam matematika dan membuat kesimpulan serta bukti-bukti untuk berbagai macam tujuan (NCTM, 1995, h. 3). Menurut paham ini asesmen ditandai dengan pengumpulan informasi dan membuat kesimpulan, serta perhatian hendaknya ditujukan pada prestasi siswa dalam aspek kognitif dan afektif. Dan yang paling penting untuk asesmen alternatif ini adalah dengan melayani berbagai macam tujuan belajar dan pembelajaan matematika.

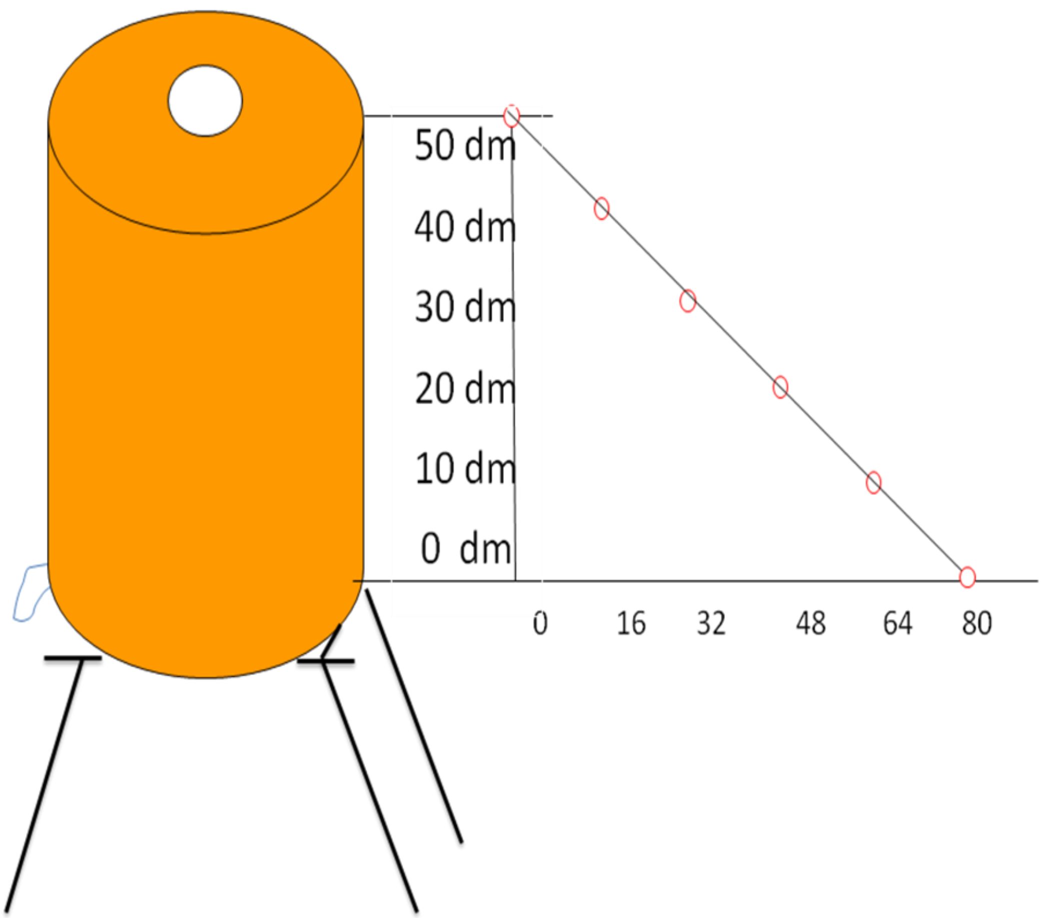
Dalam tahun 1980-an perhatian diberikan kepada asesmen kelas yang dibuat guru, dan asesmen alternatif yang berbeda dari pendekatan tes tradisional yang menekankan kepada "*paper and pencil test*" termasuk tes standar. Pada tahapan berikutnya *performance based assessment, portofolio assessment* dan jurnal *writing assessment* mulai digunakan guru untuk menilai kemajuan belajar matematika siswa.

Tabel 2: Perbandingan penilaian tradisional dan penilaian alternatif

Penilaian terhadap siswa	Konsep penilaian konvensional	Konsep penilaian alternatif
Apa yang harus dinilai?	Domain kognitif terutama pengetahuan dan ketrampilan hasil belajar	Keduanya kognitif dan afektif (pengetahuan, sikap dan ketrampilan serta hasil dan proses belajar)
Di mana dilakukannya?	Di kelas	Di dalam atau di luar kelas
Kapan siswa mengerjakan tugas Tes?	Selama belajar di kelas	Selama dan setelah proses belajar di kelas
Bagaimana dilakukannya?	Dengan cara konvensional (paper and pencil test)	Keduanya, yaitu konvensional dan cara penilaian alternatif
Seberapa lama proses berlangsung?	Blok waktu, satu atau dua jam pelajaran	Tergantung kepada luasnya tugas, sehari, seminggu, sebulan, atau mungkin bertahun-tahun
Apa tujuan penilaian itu?	Tunggal (kebanyakan untuk tujuan penskoran dan pelaporan hasil belajar)	Ganda (multiple) yang dipentingkan adalah memperbaiki proses belajar mengajar.

Penilaian matematika yang biasanya terbatas di dalam dinding-dinding kelas dan terbatas hanya dalam blok waktu tertentu saja, kini sudah mulai berubah hendaknya siswa diberi kesempatan unuk melakukan eksplorasi dan investigasi proses bermatematika. Situasi matematika yang tersaji dalam bentuk konteks nyata diberikan kepada siswa, kemudian siswa ditugasi untuk melakukan penyelidikan dan perumusan secara matematika yang pada akhirnya diharapkan siswa mampu memodelkan matematika. Jelas tugas-tugas seperti ini tidak hanya terbatas di dalam ruang kelas, namun dapat ditempuh siswa di luar kelas.

Siswa diberi kesempatan untuk melakukan penyelidikan di luar kelas, baik secara individu, secara berkelompok, ataupun secara berpasangan. Para siswa diberi kesempatan pula untuk membangun konsep-konsep yang mereka pahami dan menuliskannya dalam bentuk ekspresi tertulis baik itu dalam bentuk cerita, dalam bentuk grafik, dalam bentuk tabel ataupun dalam bentuk rumus, ungkapan, ataupun relasi yang dapat dimengerti (*make sense*) oleh orang lain.



Siswa dapat mengamati berapa sisa air di dalam TORN untuk setiap 16 menit, kemudian mencatatnya dalam table dan mencoba merumuskan bagaimana kaitan antara waktu pengurasan dengan sisa air di dalam torn dinyatakan dengan ketinggian dalam dm.

Setelah siswa menuliskannya dalam berbagai bentuk representasi matematika, siswa ditugasi untuk mengkomunikasikannya kepada teman sebayanya (peer) di dalam kelas. Komunikasi ini dapat diwujudkan dalam bentuk semacam forum (representasi) dan dapat dikemas dalam satu atau dua jam pelajaran. Sehingga siswa mampu berkomunikasi secara lisan dan tulisan. Aspek-aspek penalaran dalam berargumentasi dibangun siswa melalui diskusi bersama teman-teman sekelasnya.

Ketidakjelasan penyajian dan penalaran menyebabkan muncul banyak pertanyaan dan meminta klarifikasi lebih lanjut. Namun penjelasan yang *fluency* (secara fasih) dan penalaran yang mudah ditangkap menjadikan pemahaman diri penyaji maupun audien (pendengar) menjadi semakin terbangun secara baik.

C. Teknik-teknik penilaian

Assessment merupakan alat dan sebagai suatu aktifitas dalam pendidikan tanpa ada pengecualian. Pengembangan kemampuan pemecahan masalah siswa, kemampuan berpikir tingkat tinggi, kemampuan kerjasama antar individu, keterampilan komunikasi baik lisan maupun komunikasi tulis semuanya menjadi tuntutan masyarakat “modern” dan hendaknya siswa dapat mencapainya. Perubahan-perubahan ini hendaknya tercerminkan dalam praktek pembelajaran di kelas.

Guru-guru perlu mengukur bagaimana murid mereka mencapai dan mencatat kemajuan dalam mencapai tujuan-tujuan pendidikan. Karena penilaian tradisional tidak cukup untuk dapat melayani aspek-aspek di atas, maka terdapat suatu kebutuhan untuk mengenalkan asesmen alternatif untuk terjadinya perubahan yang lebih baik dalam mencapai tujuan.

Sejumlah teknik-teknik penilaian tersaji dalam 5.2 dan Tabel 5.3 di bawah ini meliputi asesmen: penampilan (performance), *authentic, portfolio, journal*, *project*, presentasi lisan, wawancara, observasi, *self-assessment*, dan student-constructed assessment yang masing-masing dijelaskan dalam tabel.

Tabel 5.3: Beberapa Asesmen Alternatif dan tujuan-tujuannya

Metoda penilaian alternative	**Apa yang dapat dinilailebih baik?**
Penilaian yang didasarkan pada prestasi siswa	Domain kognitif, khususnya proses berpikir tingkat tinggi dan kemampuan problem solving
Penilaian autentik	Domain kognitif, khususnya kemampuan problem solving dalam kehidupan nyata
Penilaian portofolio	Kedua domain kognitif dan afektif, khususnya berpikir siswa secara mandalam, dan ketrampilan komunikasi tulis, dan kemajuan mereka dalam belajar matematika
Penilaian projek	Domain kognitif khususnya kemampuan problem solving dan ketrampilan berpikir kreatif
Presentasi lisan	Domain kognitif, kemampuan komunikasi dan mengorganisir pembicaraan secara lisan.
Wawancara	Domain kognitif dan afektif siswa, khususnya untuk mendapatkan bentuk informasi dari beberapa siswa
Observasi kelas	Domain afektif khususnya prilaku siswa dalam belajar di kelas
Penilaian diri	Domain kognitif dan domain afektif, khususnya tentang perkembangan belajar siswa dan pertisipasi siswa dalam belajar di kelas atau dalam kelompok kerja siswa
Penilaian siswa yang dikonstruksi	Domain kognitif khususnya tingkat evaluasi dalam taxonomy Bloom tentang tujuan pendidikan dalam domain kognitif

Alat penilaian dan proses dokumentasi memberikan kepada guru banyak informasi yang bernilai tentang siswa. Informasi ini dapat digunakan sebelum, selama, dan pasca pembelajaran.

Sebelum proses pembelajaran berlangsung, guru perlu mengetahui apakah siswa memiliki pengalaman fundamental yang akan menyebabkan sukses pada fase pembelajaran berikutnya. Selama proses pembelajaran, guru hendaknya mengecek pemahaman siswa sedemikian sehingga mereka dapat mengajarkan kembali, mengoreksi dan memantau kesalah-pahaman serta kemajuan belajar siswa. Dalam pembelajaran berikutnya guru-guru hendaknya menentukan apakah tingkat penguasaan siswa sudah cukup memadai.

Mengumpulkan, menginterpretasi, dan menggunakan informasi penilaian, mengambil berbagai macam cara dan teknik penilaian, sebagaimana guru menerapkan dalam rencana penilaian berikutnya.

Penilaian pengetahuan dan keterampilan Pre-syarat

Vygotsky menjelaskan "Zone Proximal Development"(ZPD) sebagai tingkat pemahaman yang dapat dicapai siswa akibat dari dorongan dan motivasi guru serta teman sebayanya. Siswa selalu siap mempelajari sesuatu, namun guru menetapkan apakah para siswa memiliki latar belakang pengetahuan dan keterampilan (pengetahuan pra-syarat) yang cukup untuk berlanjut ke tahapan berikutnya. Untuk mendukung belajar siswa atau "*scaffolding*" seorang guru hendaknya mengetahui sejauh mana kesiapan setiap siswanya untuk memahami konsep matematika yang akan disajikan dalam pembelajaran.

D. Teknik Penilaian Observasi dan Wawancara

Banyak guru yang menggunakan teknik observasi informal dan teknik wawancara untuk membantu memahami apa yang siswa tahu dan bagaimana mereka berpikir. Teknik ini dapat digunakan secara terpisah, namun seringkali itu digunakan bersama-sama secara khusus baik untuk membuka/mengetahui apa yang siswa ketahui ataupun untuk mengetahui bagaimana siswa berpikir. Guru mengembangkan teknik-teknik wawancara dengan menggunakan dua jenis pertanyaan, yaitu pertanyaan tertutup dan pertanyaan terbuka.

Pertanyaan-pertanyaan tertutup berguna untuk pertanyaan-pertanyaan spesifik, faktual dan kesimpulan. Pertanyaan-pertanyaan itu sangat baik untuk pengecekkan pengetahuan saat itu.

- Berapa kubus diperlukan untuk membuat dua menara yang sama tinggi?
- Apa bentuk es krim yang paling populer menurut grafik yang kamu buat?
- Apakah meja itu panjangnya lebih dari satu meter?

Pertanyaan-pertanyaan terbuka perlu penalaran dan siswa perlu lebih banyak menceritakan pemikiran mereka. Guru seringkali menerapkan pertanyaan-pertanyaan tertutup, karenanya mereka perlu merencanakan pertanyaan-pertanyaan terbuka untuk memantau pemahaman mereka.

- Dapatkah kamu membuat dua ‘model menara’ yang sama tinggi? “Apakah ada cara lain untuk membuat dua ‘menara’ sama tinggi?
- Apa yang kamu peroleh tentang es krim mana yang paling populer menurut grafik yang kamu buat?
- Ukuran mana yang akan kamu pilih untuk mengukur panjang meja? Mengapa kamu memilih satuan itu dari pada satuan lain?

Dengan menggunakan pertanyaan-pertanyaan terbuka seperti di atas, guru seringkali memperoleh informasi tambahan tentang tingkat pengetahuan dan tentang cara berpikir siswa.

Karena dokumen yang lengkap dan spesifik dipelihara, maka proses penilaian dengan cara wawancara dan observasi menjadi lebih formal dan terstruktur. Wawancara formal membantu guru belajar tentang kesiapan kematangan siswa serta pemahaman proses dari konsep. Wawancara formal memiliki struktur bermakna yang meliputi sekumpulan pertanyaan dan sederet tugas-tugas.

Pandanglah sebuah segmen wawancara di bawah ini:

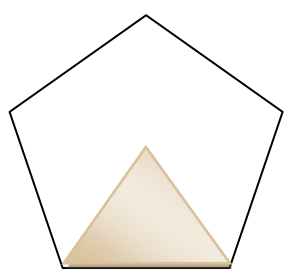
G	:	Kepada kalian diberikan pagar kawat yang akan digunakan untuk menutup sebuah wilayah yang cukup luas untuk peternakan sapi perah. Panjang bahan pagar adalah 460 meter. Bentuk bangun geometri apa yang digunakan untuk merancang agar wilayahnya sebesar-besarnya?
M1	:	Menurutku persegipanjang?
G	:	Bagaimana ukuran persegi panjang tersebut?
M1	:	Ya panjang 130 m dan lebar 100 meter?
G	:	Memangnya kelilingnya berapa?
M1	:	130 + 100 = 230 dan kelilingnya 2 x 230 = 460 meter
G	:	Kalau demikian luasnya berapa?
M1	:	Luasnya 130 x 100 = 13000 m^2
G	:	Apakah ada ukuran lain yang memenuhi itu?
M1	:	Menurut saya 110 x 120?
G	:	Kalau itu ukurannya berapa luasnya?
M1	:	Luasnya adalah 13200 m^2
G	:	Ya ternyata benar ukuran 110 x 120 lebih besar daripada hasil 130 x 100 Menurut yang lainnya (kalian) apakah masih ada yang mungkin lebih luas?
M1	:	Saya kira masih ada, yaitu 115 x 115 $meter^2$, sebab 115 x 4 berbentuk persegi panjang dengan sisi 4 dan kelilingnya adalah 460 meter
G	:	Dengan ukuran ini berapa luasnya?
M1	:	Luasnya adalah 13225 m^2

Dengan inquiry seperti itu akhirnya anak dapat menemukan bahwa luas daerah yang dapat dipagari dengan ‘kawat’ sepanjang 460 meter adalah 13225 m^2 Dan luas ini merupakan luas terbesar untuk segi empat? Coba kalian selidiki lebih lanjut apakah kalau bentuknya segitiga tidak akan sebesar itu?

G	:	Bagaimana kalau daerah yang dipagar berbentuk segitiga?
M2	:	Baiklah, kalau bentuknya segitiga maka salah satu bentuk yang mungkin sisi-sisinya berturut-turut 200, 150, dan 110, sehingga menggunakan rumus $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ diperoleh bilangan mendekat 8139 m^2
G	:	Bagaimana kalau bentuknya segitiga sama sisi?
M2	:	Kalau segitiga sama sisi, maka panjang sisinya adalah 153,3 meter Menggunakan rumus ½ a b sin C, diperoleh ½ x 153,3 x 153,3 x sin 60^o = 10176 m^2
G	:	Baiklah menggunakan segitiga dan menggunakan segi-empat berturut-turut telah diperoleh dua luas aberbeda yaitu 13225 m^2 (persegi) dan 10176 m^2 (segitiga sama sisi). Bapak/Ibu guru menduga masih ada bentuk bangun lain yang memberikan luas sebear-besarnya.
M2	:	Baik Bu/Pa akan kami diskusikan terlebih dahulu dengan kawan-kawan

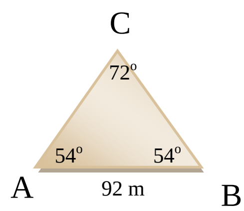
Wawancara dan diskusi dengan guru di atas mendorong siswa untuk mencari kemungkinan bangun geometri lain yang menyebabkan luasnya terbesar.

Kalau segitiga, diperoleh 10176 m^2, kalau peregi seluas 13225 m^2 bagaimana kalau segilima beraturan?



Kalau segilima beraturan dan kelilingnya adalah 460 meter, maka satu sisinya berukuran 92 meter.

Salah satu segitiga pada segilima beraturan akan berbentuk sebagai berikut



Sudut pusatnya adalah 72^o, sehingga sudut alasnya adalah 54^o, hal tersebut tampak seperti pada gambar di atas.

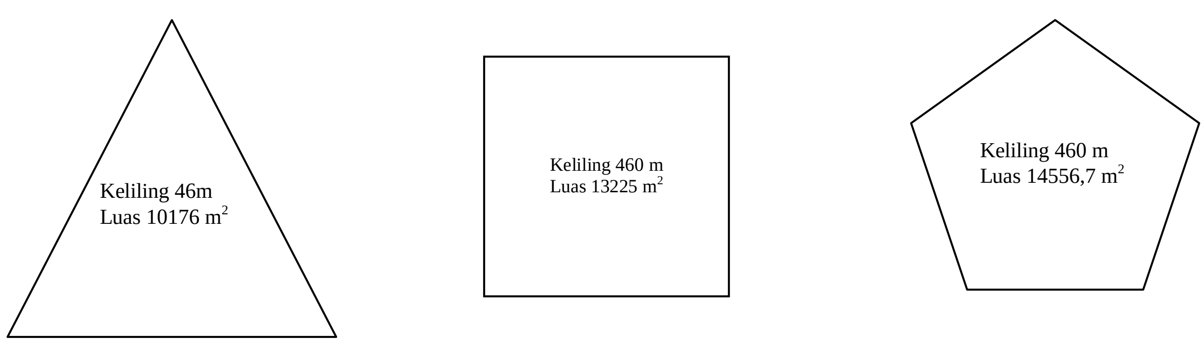
Dengan menggunakan aturan sinus diperoleh AC = (92 x sin 54^o)/sin 72^o = 78,23 m Sehingga tinggi segitiga ABC adalah t = AC x sin 54^o = 78,23 x 0.8090 = 63,29.

Sekarang luas daerah sebuah segitiga ABC di atas dapat dicari sebagai berikut:

A_1 = ½ x 63,29 x 92 = 2911,34

Karena satu segitiga luasnya 2911,34 m^2, maka luas segilima beraturan tersebut adalah 5 x 2911,34 = 14556,7 m^2.

Nah sekarang kita ulangi pengamatan kita terhadap bangun-bangun yang terjadi:



Memperhatikan gejala tersebut dapat diduga masih ada lagi bangun yang lain yang menyebabkan daerah yang terjadi adalah daerah terbesar.

Salah seorang siswa mengajukan usul bagaimana kalau bangunyang dimaksud adalah bangun lingkaran. Kelilingnya adalah 460 m, berapakah luasnya? Dari sini siswa berpikir kalau kelilingnya 460 m apakah luasnya dapat langsung dicari? Tentu anak akan berpikir kalau mencari luas yang diperlukan adalah jari-jarinya. Padahal jri-jari lingkaran belum diketahui, maka kita perlu mencari jari-jari.

$K = 460$

$K = 2\pi R$

Sehingga $2\pi R = 460$, sehingga $R = 230/\pi$

Selanjutnya luas daerah lingkaran dicari dengan $L = \pi R^2$ sehingga

$L = \pi(230/\pi)^2 = (52900)/\pi = 16487{,}13\ m^2$

Dengan pelaksanaan observasi dan wawancara, siswa dapat memahami hubungan antara luas dan keliling, keliling dan jari-jari, serta jari-jari dengan luas

E. Teknik Penilaian Projek

Agar siswa baik secara individu maupun dalam kelompok mlakukan proses investigasi dan eksplorasi, maka teknik penilaian proyek lebih mendekati penggalian kemampuan yang sesungguhnya. Misalkan siswa ingin mengetahui seberapa cepat sebuah pohon itu tumbuh, sementara ia memperoleh data dari departemen pertanian dan departemen perkebunan tentang pertumbuhan sejenis pohon palma.

Data tersebut tersaji sebagai berikut:

Umur (tahun)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tinggi (m)	0	2	3,16	4	4,64	5.17	5.61	6	6.34

Siswa diminta menyelidiki bagaimana keterkaitan antara usia pohon dan ketinggian pohon yang dimaksud dengan menggunakan data tersebut.

Mula-mula siswa dapat memberikan suatu dugaan bahwa pertumbuhan pohon tersebut hanya cepat di awal-awal saja, namun lambat setelah melalui tahun ke-7, ke-8, ke-9 dst. Diduga pertumbuhan ini memenuhi hubungan $T = 2\ {}^{a}\log U$, dengan menggunakan data yang ada siswa diminta untuk menentukan berapakah nilai a. Pengamatan siswa terhadap data tersebut menghendaki agar siswa melakukan proses manipulasi untuk mendapatkan hubungan yang sesuai dengan data tersebut.

Misalkan untuk T = 2 dan U = 2 memberikan hubungan $2 = 2\ {}^{a}\log 2$ artinya

${}^{a}\log 2 = 1$, sehingga didapat $a = 2$.

Perolehan ini digunakan untuk menguji apakah T = 2 ^{2}log 7 = 5,61,

Siswa juga dapat ditugasi untuk menyelidiki bagaimana laju perubahan luas permukaan kamper (kapur barus) berbentuk bulat bola yang disimpan di dalam pakaian di dalam lemari ataupun kamper yang disimpan di toilet sebagai penghaum ruangkan kecil ini.

Setiap hari siswa diminta menylidiki diameter dari kapur barus berbentuk bola tersebut dan menyajikannya dalam tabel di bawah ini:

Hari ke	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Diameter(cm)									

Kapankan laju peubahan jari-jari paling cepat? Kapankah laju perubahan luas bola paling cepat? Mengapa? Bagaimana laju perubahan volume bola?

Coba anda (siswa) gambarkan grafik yang menghubungkan waktu t dengan jari-jari bola. Adakah hubugan antara laju perubahan jari-jari, laju perubahan luas bola dan laju perubahan volume bola? Bagaimanakah hubungan dari laju-laju dimaksud?