

TITIK GARIS DAN SUDUT

PELATIHAN GURU-GURU MATEMATIKA

DI MANOKWARI

PAPUA BARAT

Oleh:

Drs.Turmudi, M.Ed., M.Sc., Ph.D.

PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2010

1. Titik, garis dan Sudut

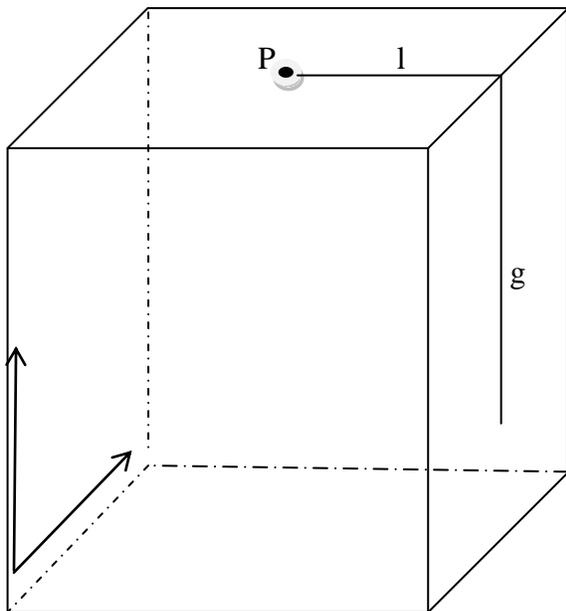
Dalam mempelajari geometri menggunakan pendekatan-pendekatan terkini tidak berangkat dari struktur geometri seperti titik, garis, dan sudut pada bidang dan ruang melainkan berangkat dari konteks, dari fenomena dengan cara melihat unsur-unsur itu. Misalkan kita melihat gedung pencakar langit berikut ini.



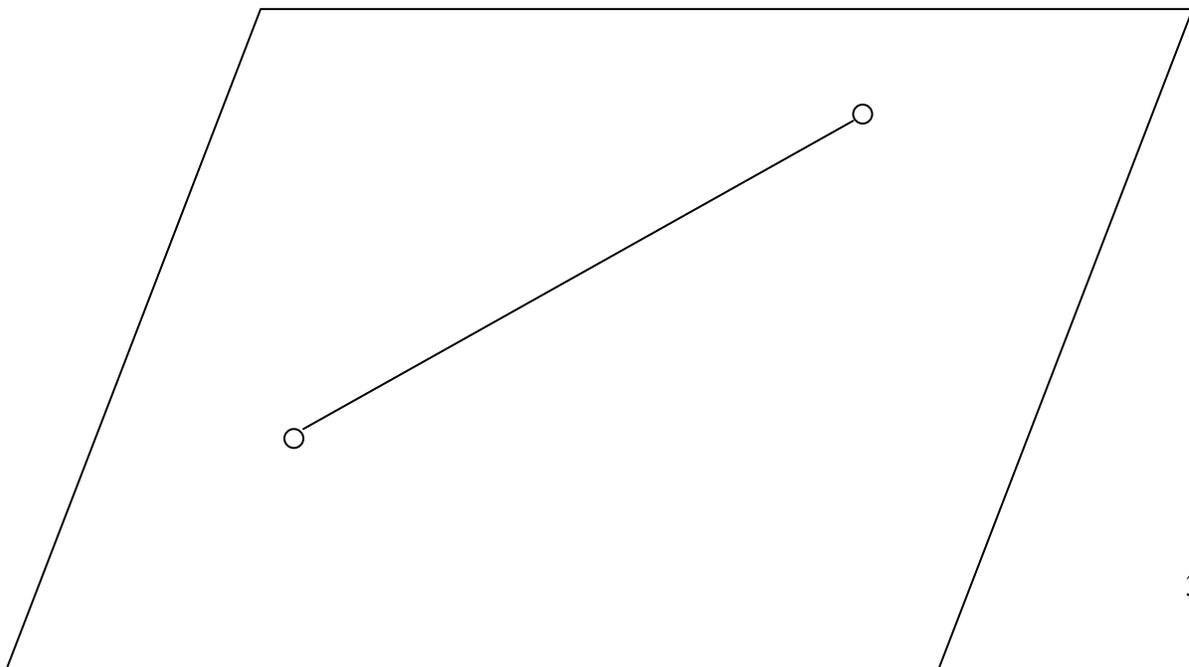
Apabila kita memperhatikan gedung pencakar langit di atas, maka reaksi yang mungkin muncul adalah keindahan, kerapihan, dan kekokohan dari sudut pandang arsitektur. Bahwa di dalamnya harus ada lift, harus ada AC, ada toilet dsb.

Namun dari sudut pandang matematika khususnya geometri, kita dapat memandang bahwa bangunan pencakar langit meliputi kubus dan balok. Sudah barang tentu di dalam kubus atau model kubus dan model balok kita dapat mengidentifikasi titik, garis dan sudut.

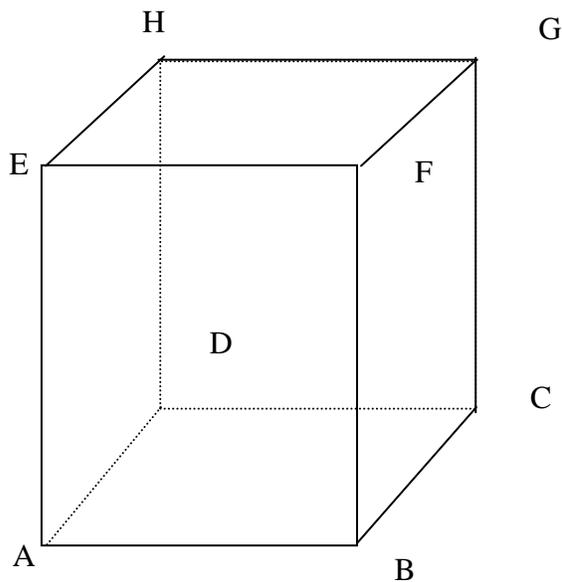
Sebuah lampu, bola lampu, dalam suatu ruangan dapat dipandang sebagai titik (titik materi). Lihat titik P atau lampu P dan garis l dan garis g. Suatu kabel yang menghubungkan bola lampu dengan saklar dapat dipandang sebagai garis (lihat garis l dan garis g). Tepi-tepi sebuah ruang dapat membentuk pojok atau sudut.



Titik, garis dan sudut dikenali melalui pendefinisian formal melainkan melalui pengamatan yang mereka kenali, misalkan lampu P dinenali sebagai titik pada sebuah bidang walaupun titik sebenarnya tidak memiliki ukuran. Kabel l dan g dikenali sebagai garis (atau garis lurus) dan pojokan suatu kubus membentuk sebuah sudut.

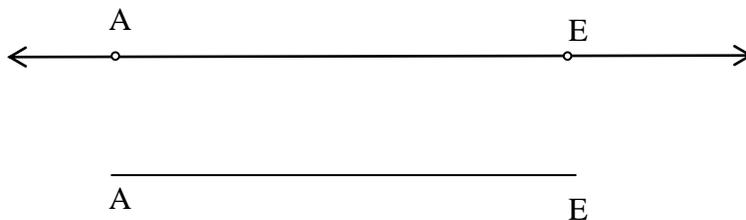


Posisi dua pemain di lapangan sepak bola dapat dipandang sebagai dua titik, kalau dari kedua titik dihubungkan dengan garis terpendek, jadilah segmen garis. Dengan memperhatikan bangun-bangun pencakar langit dan ruangan atau tempat di mana kita berdomisili atau ruangan kelas kita, maka kita dapat mengenali suatu titik, garis, dan sudut



Titik pada bidang atau dalam ruang misalkan titik A, B, C, atau D. Titik M di sepanjang garis AC dan titik O di sepanjang BH

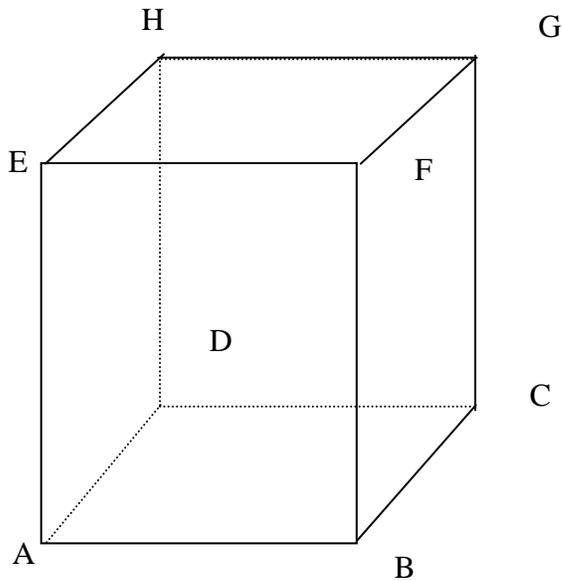
Garis dapat kita kenali misalkan melalui garis AE. Namun kita perlu membedakan garis AE dan segmen garis AE.



Melalui dua buah titik berbeda di dalam bidang dapat dibuat tepat satu garis lurus.

Sekarang coba anda identifikasikan daudut BDFn kenali sudut yang dapat anda buat pada suatu kubus.

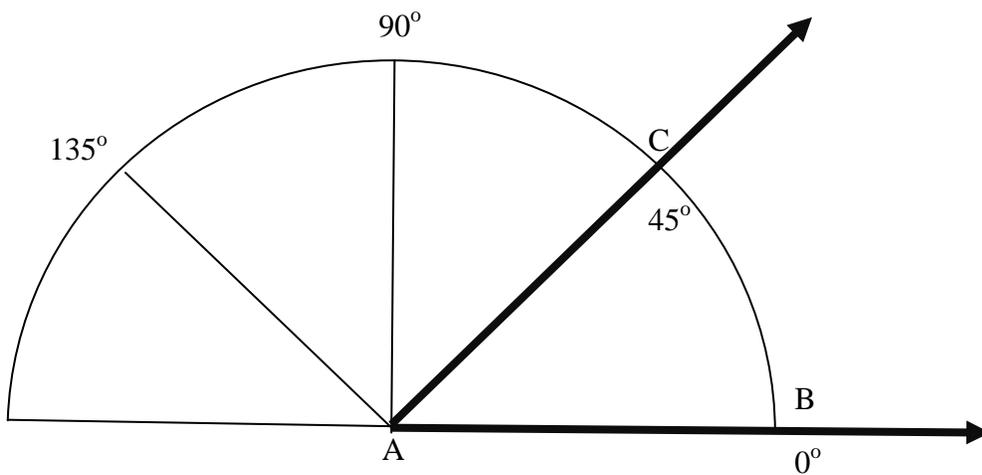
- (a) Sudut-sudut apa saja yang dapat anda kenali pada kubus di bawah ini?
- (b) Coba anda perhatikan sudut BAC?
- (c) Perhatikan pula sudut BDF



Dengan memperhatikan kubus anda dapat mengenali sudut BAC yang dapat simbolkan dengan $\angle BAC$ atau $\angle A$ atau $\angle CAB$.

Untuk mengukur besar sudut digunakan busur derajat.

Berdasarkan hasil pengukuran menggunakan busur derajat. Sudut BAC atau $\angle BAC$ ini berukuran 45° , bukan 135° , sehingga dapat kita tuliskan sebagai $\angle BAC = 45^\circ$



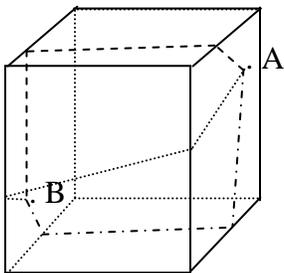
Berdasarkan ukurannya sudut dapat diklasifikasikan sebagai

- (a) Sudut lancip
- (b) Sudut siku-siku
- (c) Sudut tumpul
- (d) Sudut lurus

2. Dimensi Tiga

Kemampuan tilikan ruang atau *spatial competency* merupakan bagian tak terpisahkan dari kemampuan matematika yang hendaknya dipelajari oleh siswa di sekolah. Oleh karena itu bagi seorang guru matematika sekolah menengah menjadi suatu kemampuan yang esensial untuk dimiliki. Kemampuan tilikan ruang, kemampuan memahami bagian-bagian dari ruang berupa bidang, garis, titik, sudut, proyeksi, cara menggambar bangun ruang, jarak, sifat-sifat garis sejajar, menentukan titik tembus, menggambar penampang irisan suatu bidang dengan bangun ruang, semuanya merupakan bagian-bagian yang juga harus dimiliki oleh guru dan calon guru matematika.

Misalkan bagaimana menentukan jarak antara dua buah titik yang terletak pada kulit kubus, dengan ketentuan jarak dimaksud harus melalui permukaan kubus, di sini memerlukan kemampuan guru mengekspresikan bangun ruang ke dalam bidang, artinya bagaimana guru atau siswa membuat jaring-jaring kubus dan selanjutnya mengkonstruksi posisi di mana jarak antara kedua titik dimaksud menjadi minimum.

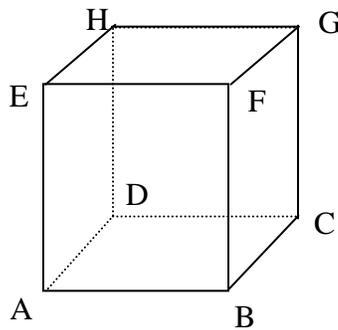


Meskipun hal di atas bukan merupakan kemampuan utama untuk dapat memvisualkan tilikan ruang ke dalam bidang, sekurang-kurangnya guru dapat membimbing siswa mengeksplorasi sifat-sifat jarak antara dua titik yang diketahui pada permukaan bangun ruang.

A. Menggambar Bangun Ruang

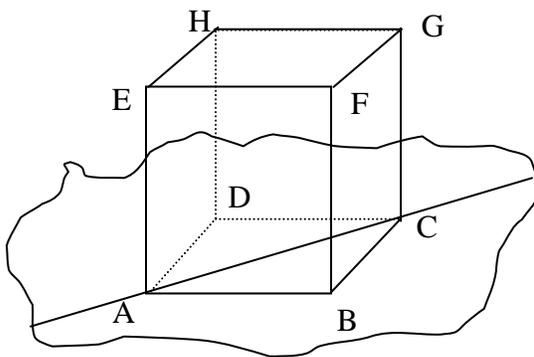
Unsur-unsur yang harus mendapat perhatian pada saat kita menggambar dan memahami bangun ruang adalah titik, garis, dan bidang, serta hubungannya antara satu dengan lainnya dan posisi dari titik, garis, dan bidang pada ruang berdimensi tiga.

Perhatikan kubus di bawah ini.

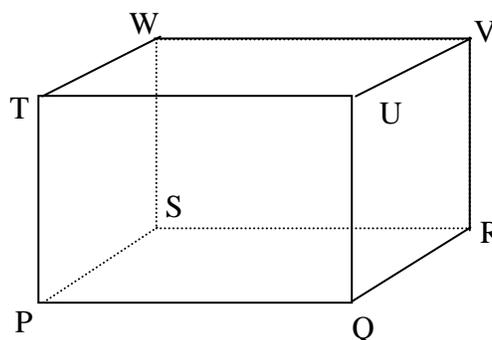
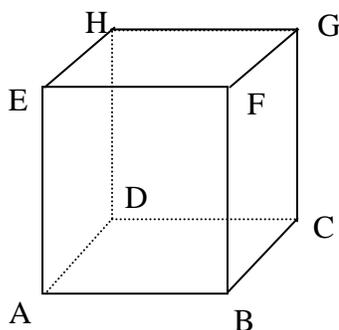


Perhatikan kubus ABCD.EFGH . Titik-titik sudut pada kubus tersebut adalah titik A, B, C, D, E, F, G, dan H. Rusuk-rusuknya adalah \overline{AB} , \overline{AD} , \overline{AE} , \overline{BC} , \overline{BF} , \overline{CD} , \overline{CG} , \overline{DH} , \overline{EH} , \overline{EF} , \overline{FG} , dan \overline{GH} . Sedangkan bidang-bidang yang membentuk kubus ABCD.EFGH adalah bidang ABCD, ABFE, DCGH, EFGH, ADHE, dan BCGF.

Perhatikan ruas garis \overline{AB} yang dapat diperpanjang ke kiri dan ke kanan sedemikian sehingga terbentuk garis \overleftrightarrow{AB} yang dinotasikan dengan \overleftrightarrow{AB} . Demikian juga bidang ABCD dapat diperluas keseluruhan arah yang mungkin asalkan sebidang dengan ABCD



Bangun Ruang Kubus dan Balok



Pada kubus ABCD.EFGH

- Bidang ABFE dan bidang DCGH dikatakan bidang frontal. Bidang frontal adalah bidang yang sejajar dengan bidang gambar.
- Bidang ABCD, ADHE, EFGH dan BCGF dinamakan bidang ortogonal, yaitu bidang-bidang yang tegak lurus bidang gambar.
- Bidang ABCD dan EFGH dinamakan bidang horizontal.
- Perhatikan bahwa meskipun sudut BAD berukuran 90° , tetapi digambarkan tidak tepat 90° , melainkan kurang dari 90° . Sudut yang demikian dinamakan sudut *surut* atau sudut *menyisi*.
- Ruas-ruas garis yang tegak lurus bidang frontal atau bidang gambar dinamakan ruas garis ortogonal.
- Apabila sisi AB atau rusuk AB = a cm, pada gambar sesungguhnya rusuk AD tidak digambarkan persis a cm, melainkan lebih pendek dari a cm. Andaikan AD = x cm dan $x < a$, perbandingan antara x dengan a dinamakan *perbandingan proyeksi* atau *perbandingan ortogonal*. Sehingga untuk gambar di atas perbandingan proyeksinya adalah x/a

Coba anda sebutkan keterangan-keterangan pada balok PQRS.TUVW tentang:

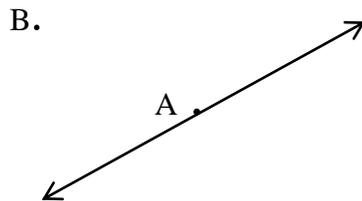
- (a) Bidang-bidang frontal
- (b) Bidang-bidang ortogonal
- (c) Bidang-bidang horizontal
- (d) Sudut-sudut surut
- (e) Ruas-ruas garis ortogonal
- (f) Garis-garis vertikal
- (g) Garis-garis horizontal

Kedudukan Titik terhadap Garis

Ada dua kemungkinan posisi titik pada suatu ruas garis, yaitu titik terletak pada garis dan titik terletak di luar garis.

Misalkan titik A terletak pada garis g

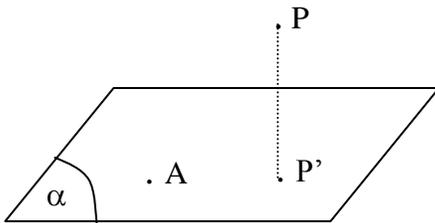
Titik B terletak di luar garis g



Pada kubus ABCD.EFGH titik H terletak pada garis \overline{HG} , tetapi titik D di luar garis \overline{EG} . Coba anda sebutkan tiga buah titik yang terletak di luar garis PV pada balok PQRS.TUVW

Kedudukan titik terhadap Bidang

Ada dua kemungkinan kedudukan titik pada sebuah bidang, yaitu titik terletak pada bidang atau titik terletak di luar bidang.



Titik A terletak pada bidang α , tetapi titik P terletak di luar bidang α . Proyeksi titik P pada bidang α adalah titik P'

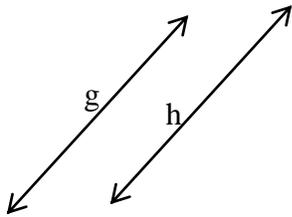
Pada kubus ABCD.EFGH, jika M titik potong antara \overline{AC} dan \overline{BD} , maka M terletak pada bidang ABCD, tetapi titik E, F, dan H tidak terletak pada bidang ABCD. Coba anda sebutkan titik-titik yang terletak pada bidang PQUT dan titik-titik yang terletak di luar bidang SRVW pada balok PQRS.TUVW

Kedudukan garis Terhadap garis lain

Kedudukan garis terhadap garis lain terdapat beberapa kemungkinan antara lain:

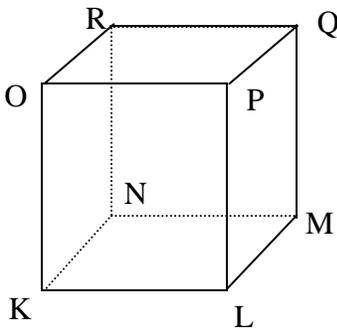
- Dua garis saling sejajar
- Dua garis saling berpotongan di satu titik
- Dua garis berimpit

Dua garis saling bersilangan.



Garis $g \parallel h$

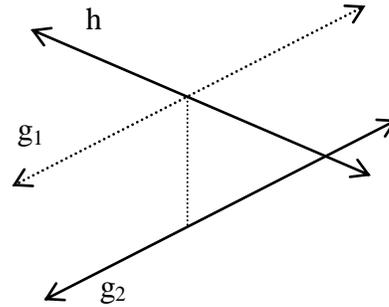
Contoh:



Garis l dan m berpotongan di titik A

Diketahui kubus KLMN.OPQR

- Sebutkan tiga pasang garis yang sejajar
- Sebutkan empat garis yang saling berpotongan
- Sebutkan pasangan garis yang saling bersilangan



$g_1 \parallel g_2$, g_1 berpotongan dengan h , dan g_2 tidak terletak pada bidang yang memuat g_1 dan h , maka g_2 dikatakan bersilangan dengan h .

Jawab:

- $KO \parallel LP$, $KL \parallel NM$, dan $OR \parallel LM$
- OQ berpotongan dengan RP ; KR berpotongan dengan ON ; PM berpotongan dengan QL , dan RL berpotongan dengan PL
- RP bersilangan dengan KL ; KM bersilangan dengan PQ dan OR bersilangan dengan MN

Untuk dua garis sejajar, apabila jarak antara kedua garis tersebut adalah nol, maka kedua garis ini dinamakan saling *berimpit*.

Untuk dua garis yang saling berpotongan, ada dua kemungkinan yaitu berpotongan tegak lurus dan berpotongan tidak tegak lurus. Demikian juga dua garis yang bersilangan dapat bersilangan tegak lurus atau bersilangan tidak tegak lurus. Dapatkah anda menentukan pasangan-pasangan garis yang saling berpotongan tegak lurus dan bersilangan tegak lurus pada kubus

ABCD.EFGH? Coba anda sebutkan pasangan-pasangan tersebut.

Kedudukan Garis terhadap bidang

Beberapa kemungkinan kedudukan garis terhadap bidang antara lain:

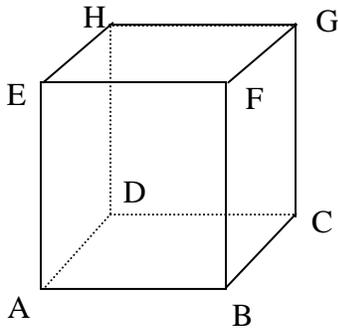
Garis terletak pada bidang

Garis sejajar bidang

Garis menembus bidang (berpotongan dengan bidang hanya pada satu titik saja)

Contoh:

Perlihatkanlah tiga keadaan di atas untuk kubus ABCD.EFGH



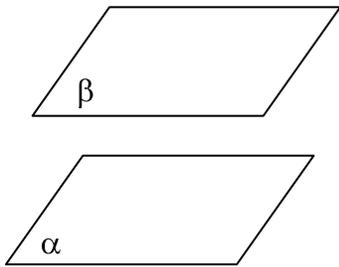
- (a) Sebutkan garis yang terletak pada bidang ABFE
- (b) Sebutkan garis-garis yang menembus bidang ACGE
- (c) Sebutkan garis yang sejajar bidang BCGF

Jawab:

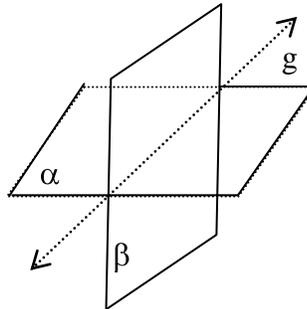
- (a) AE, BE, dan AF adalah garis-garis yang terletak pada bidang ABFE
- (b) Garis-garis yang menembus bidang ACGE antara lain garis DF dan HB, atau garis FM di mana M adalah titik tengah DH.
- (c). Garis-garis sejajar bidang BCGF di antaranya: HE, DH, AH, atau DE.

Kedudukan bidang terhadap bidang lain

Kedudukan bidang terhadap bidang lain kemungkinannya adalah keduanya sejajar atau keduanya berpotongan pada satu garis, atau kedua bidang berimpit.

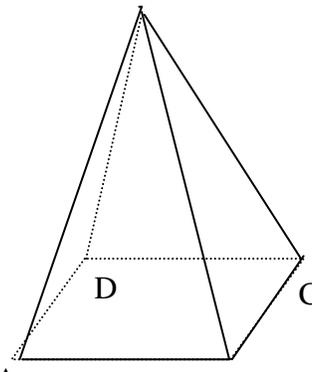
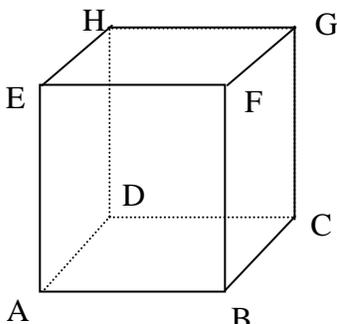


Bidang α dan β saling sejajar ditulis $\alpha // \beta$



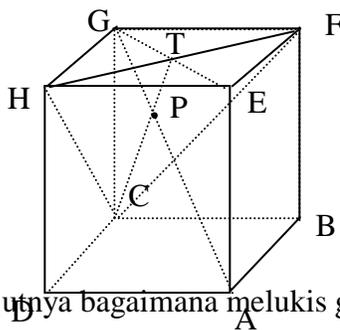
Bidang α dan β berpotongan di sepanjang garis g

Coba anda selidiki bidang-bidang yang saling sejajar dan bidang yang saling berpotongan pada kubus dan limas di bawah ini!



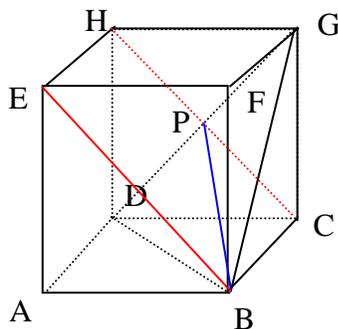
Melukis Titik Tembus Garis pada Bidang dan Garis Perpotongan Dua Bidang

Misalkan ABCD.EFGH adalah sebuah kubus, bagaimana melukis titik tembus antara AG dengan bidang CFH



- Buat bidang CHF, misalkan HF dan GE berpotongan di titik T
- Hubungkan C dan T
- Perpotongan antara CT dan AG merupakan titik tembus AG pada bidang CFH
- Titik P merupakan titik tembusnya

Selanjutnya bagaimana melukis garis yang merupakan perpotongan antara dua bidang?



Contoh:

Lukislah garis yang merupakan perpotongan antara bidang BCHE dan bidang BDG pada kubus ABCD.EFGH!

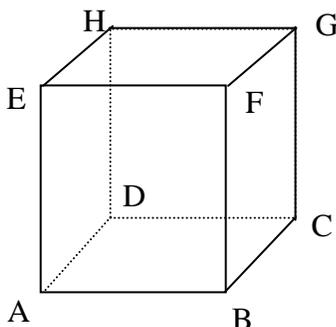
Jawab:

Misalkan P adalah titik potong antara DG dan CH. Dapat anda lihat bahwa BP terletak pada bidang BCHE maupun pada bidang BDG, sehingga BP merupakan garis persekutuan antara bidang BDG dan bidang BCHE.

I. Sudut dan bidang dalam kaitannya dengan menggambar Bangun Ruang

Sudut-sudut antara rusuk dan diagonal ruang, maupun diagonal bidang sisi dapat diperlihatkan seperti pada gambar kubus berikut ini. Demikian pula sudut yang dibentuk oleh garis dan bidang serta sudut antara bidang dengan bidang.

Contoh:



Pada kubus ABCD.EFGH perhatikanlah sudut yang dibentuk oleh

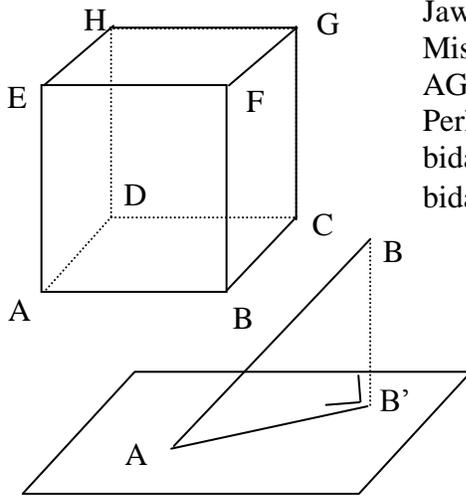
- AC dan CE
- AH dan DG
- BD dan EF

Jawab:

- Sudut antara AC dan CE adalah $\angle ACE$
- Sudut antara AH dan DG adalah $\angle FAH$, sebab $DG \parallel AF$
- Sudut antara BD dan EF adalah $\angle ABD$, sebab $EF \parallel AB$.

Contoh:

Lukislah sudut antara AG dan bidang BDHF pada kubus ABCD.EFGH



Jawab:

Misalkan AC dan BD berpotongan di titik M dan

AG menembus bidang BDHF di titik P

Perhatikan bahwa MP merupakan proyeksi AP pada

bidang BDHF, sehingga sudut antara AG dan

bidang BDHF adalah $\angle APM$

Catatan: Proyeksi AB pada bidang α jika A

terletak pada bidang α adalah garis AB' di

mana B' adalah proyeksi B pada bidang α ,

artinya BB' tegak lurus bidang α

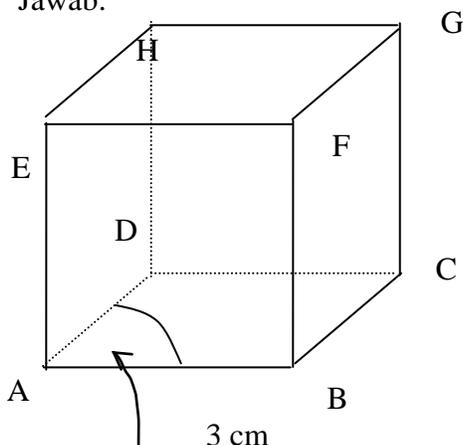
Hingga saat ini anda telah mengenal pengertian bidang frontal, ortogonal, horizontal, sudut surut, perbandingan proyeksi. Coba anda gunakan pengertian-pengertian tadi untuk menggambarkan bangun ruang (kubus) berikut ini.

Contoh:

Gambarkanlah sebuah kubus ABCD.EFGH dengan ukuran rusuk 3 cm , bidang ABFE frontal,

besar sudut surut 40° dan perbandingan proyeksi $\frac{1}{2}$

Jawab:



Bidang ABFE adalah bidang frontal dan ukurannya sesuai dengan ukuran sesungguhnya bersisi 3 cm.

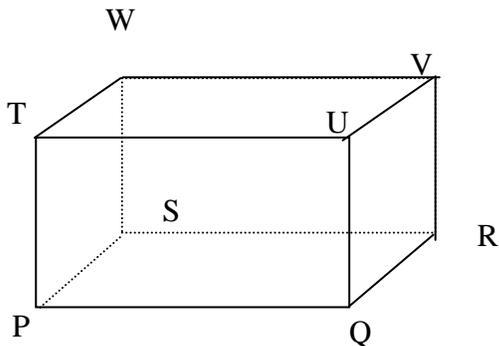
Rusuk AD berukuran $1\frac{1}{2}$ cm, sebab perbandingan proyeksinya $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} = 1\frac{1}{2} \text{ cm}$.

Sudut BAD merupakan sudut surut dengan ukuran sesungguhnya 40° . Bidang alasnya meskipun merupakan persegi, tampak sebagai jajar genjang yang tidak bersudut siku-siku. Ruas garis AD, CD, dan DH digambarkan sebagai ruas garis yang putus-putus.

Sudut surut

Contoh

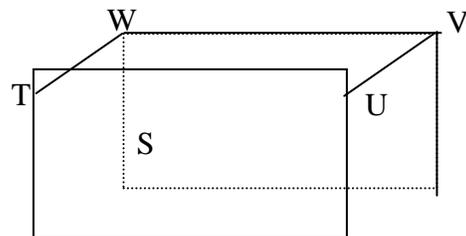
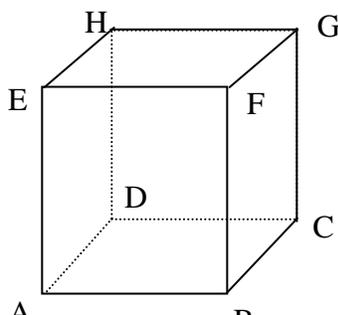
Gambarkanlah sebuah balok PQRS.TUVW dengan bidang PQUT adalah bidang frontal, $PQ = 6$ cm $PT = 2$ cm dan $PS = 4$ cm dengan sudut surut $QPS = 45^\circ$ dan perbandingan proyeksi $\frac{3}{4}$ cm
 Jawab:



Ukuran-ukuran pada gambar
 $PQ = 6$ cm (frontal)
 $PT = 2$ cm (frontal)
 $PS = \frac{3}{4} \times 4$ cm = 3 cm (menggunakan perbandingan ortogonal)
 $\angle QPS = 45^\circ$

Latihan 1.1

1. Gambarkanlah sebuah kubus dengan rusuk 3 cm dan ADHE merupakan bidang frontal, sudut surut ADC berukuran 60° dengan perbandingan proyeksi $\frac{1}{3}$. Sebutkanlah
 - (a) Garis-garis yang orthogonal
 - (b) Garis-garis yang horizontal
 - (c) Bidang-bidang orthogonal
 - (d) Bidang-bidang yang horizontal
 - (e) Pasangan bidang yang frontal.
2. Pada kubus yang digambar pada no 1 di atas, sebutkanlah
 - (a) Tiga titik yang terletak di luar garis AE
 - (b) Dua titik pada garis AG
3. Apabila titik A pada kubus ABCD.EFGH diproyeksikan pada bidang CDHG, tentukanlah hasil proyeksinya





4. Tentukan proyeksi segmen garis SU dari balok PQRS.TUVW pada bidang-bidang berikut ini:
 - a. PQUT
 - b. PQRS
 - c. QUVR
 - d. PSWT
5. Dari balok pada No. 4 di atas tuliskan
 - a. tiga pasang ruas garis yang berpotongan
 - b. tiga pasang ruas garis yang berpotongan tegak lurus
 - c. tiga pasang ruas garis yang bersilangan
6. Pada kubus ABCD.EFGH Berapakah besar sudut antara
 - a. HF dan AB
 - b. EG dan BD
 - c. DF dan HE
 - d. BH dan EF
7. Pada kubus ABCD.EFGH, lukislah titik tembus
 - a. DF pada ACE
 - b. BH pada ACF
 - c. CE pada BDE
8. Tentukanlah besar sudut antara garis-garis yang diketahui pada kubus ABCD.EFGH dengan bidang-bidang yang disebutkan.
 - a. AC dengan BDHF
 - b. CD dengan ADHE
 - c. AG dengan ABCD
 - d. BH dengan ACE
9. Carilah garis yang merupakan perpotongan antara
 - a. Bidang PQRO dengan KORN
 - b. Bidang KLQR dengan MNRQ
 - c. Bidang RQL dengan LPRN
 - d. Bidang KMP dengan PMR
10. Lukislah sudut antara garis dan bidang yang diketahui pada kubus:

- a. DF dan ACGE
- b. BM dan EFGH bila M titik potong EG dan HF
- c. CE dan ABFE