FILE : 10

RINGKASAN PERTEMUAN KEENAM

STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH :

NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

B A N D U N G

EKSPEKTASI SATU PEUBAH ACAK

Dalam hal ini akan dibahas beberapa macam ukuran yang dihitung berdasarkan ekspektasi dari satu peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, yaitu nilai ekspektasi, rataan, varians, momen, fungsi pembangkit momen, dan pertidaksamaan Chebyshev.
Jika kita mempunyai fungsi peluang atau fungsi densitas dari sebuah peubah acak, maka kita sudah menjelaskan penghitungan nilai peluang dari peubah acak yang berharga tertentu. Selain itu, kita juga bisa menentukan beberapa ukuran yang didasarkan pada fungsi peluang atau fungsi densitas, diantaranya rataan dan varians. Kedua ukuran ini selanjutnya bisa merupakan ciri dari sebuah distribusi, dan bisa juga diperoleh dari ukuran lainnya, yaitu fungsi pembangkit momen, serta merupakan bentuk khusus dari sebuah ukuran yang dinamakan momen. Semua ukuran yang dijelaskan dalam Bab 6 ini didasarkan pada nilai ekspektasi.

NILAI EKSPEKTASI

Penghitungan nilai ekspektasi dari fungsi peubah acak diskrit bisa dilihat dalam Definisi 6.1.
Definisi 6.1 : NILAI EKSPEKTASI DISKRIT

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluangnya di x adalah p(x) dan u(X) adalah fungsi dari X, maka nilai ekspektasi dari u(X), dinotasikan dengan E[u)X)], didefinisikan sebagai:

$$\boxed{E[u(X)] = \sum_x u(x).\,p(x)}$$

Penghitungan nilai ekspektasi dari fungsi peubah acak kontinu bisa dilihat dalam Definisi 6.2.
Definisi 6.1 : NILAI EKSPEKTASI KONTINU

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan nilai fungsi densitasnya di x adalah f(x) dan u(X) adalah fungsi dari X, maka nilai ekspektasi dari u(X), dinotasikan dengan E[u)X)], didefinisikan sebagai:

$$\boxed{E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x).\,f(x)\,dx}$$

Berikut ini akan dijelaskan beberapa sifat penting dari nilai ekspektasi yang selanjutnya akan memudahkan dalam perhitungannya. Sifat-sifat ini akan dijelaskan dalam Dalil 6.1 dan pembuktiannya akan digunakan peubah acak diskrit.
Dalil 6.1: SIFAT-SIFAT NILAI EKSPEKTASI

1. *Jika c adalah sebuah konstanta, maka:*

$$\boxed{E(c) = c}$$

2. *Jika c adalah sebuah konstanta dan u(X) adalah fungsidari X, maka:*

$$E[c.u(X)] = c.E[u(X)]$$

3. *Jika c dan d adalah dua buah konstanta dan u(X) dan v(X) adalah dua buah fungsi dari X, maka:*

$$E[c.u(X) + d.v(X)] = c.E[u(X)] + d.E[v(X)]$$

Bukti:
Misalkan X adalah peubah acak diskrit dengan nilkai fungsi peluang dari X di x adalah p(x).

1. $E(c) = \sum_x c.p(x)$

   $= c.\sum_x p(x)$

   E(c) = (c)(1) = c   (terbukti)

2. E[c.u(X)] = $\sum_x c.u(x).p(x)$

   $= c.\sum_x u(x).p(x)$

   E[c.u(X)] = c.E[u(X)]   (terbukti)

3. E[c.u(X) + d.v(X)] = $\sum_x [c.u(x) + d.v(x)].p(x)$

   $= \sum_x c.u(x).p(x) + \sum_x d.v(x).p(x)$

   $= c.\sum_x u(x).p(x) + d.\sum_x v(x).p(x)$

   E[c.u(X) + d.v(X)] = c.E[u(X)] + d.E[v(X)]   (terbukti)

RATAAN

Jika u(X) = X dalam Definisi 6.1, maka kita akan memperoleh sebuah ukuran yang disebut rataan dari peubah acak diskrit X atau rataan dari distribusi.

Definisi 6.3: RATAAN DISKRIT

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluang dari X di x adalah p(x), maka rataan dari peubah acak X didefinisikan sebagai:

$$E(X) = \sum_x x.p(x)$$

Jika u(X) = X dalam Definisi 6.2, maka kita akan memperoleh sebuah ukuran yang disebut rataan dari peubah acak kontinu X atau rataan dari distribusi.

Definisi 6.4: RATAAN KONTINU

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan nilai fungsi densitas dari X di x adalah f(x), maka rataan dari peubah acak X didefinisikan sebagai:

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx}$$

Rataan dari sebuah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu biasanya dinotasikan dengan μ (dibaca "mu"), sehingga apabila peubah acaknya X maka μ = E(X). Kemudian nilai rataan dari sebuah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu tidak selalu ada. Tidak selalu ada artinya nilai rataan tersebut bisa mempunyai nilai dan bisa juga tidak mempunyai nilai. Nilai rataan dari sebuah peubah acak itu ada, jika hasil penjumlahannya atau pengintegralannya ada. Sebaliknya, nilai rataan dari sebuah peubah acak itu tidak ada, jika hasil penjumlahannya atau pengintegralannya tidak ada.

Berikut ini diberikan contoh nilai rataan dari sebuah peubah acak itu tidak ada, baik peubah acak diskrit maupun kontinu.

VARIANS

Berikut ini akan dijelaskan definisi varians dari sebuah peubah acak yang berlaku bagi peubah acak diskrit maupun kontinu.

Definisi 6.5: VARIANS

Misalnya X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu.
Varians dari X didefinisikan sebagai:

$$\boxed{Var(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X - \mu)^2}$$

Varians dari peubah acak X sering dinotasikan dengan σ_X^2.
Akar pangkat dua positif dari varians disebut *simpangan baku* dari peubah acak X dan dinotasikan dengan σ_X.
Penghitungan varians dari peubah acak diskrit bisa dilihat dalam Definisi 6.6.

Definisi 6.6: VARIANS DISKRIT

Jika X adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka varians dari X didefinisikan sebagai:

$$\boxed{Var(X) = \sum_x (x-\mu)^2 .p(x)}$$

Penghitungan varians dari peubah acak kontinu bisa dilihat dalam Definisi 6.7.

Definisi 6.7: VARIANS KONTINU

Jika X adalah peubah acak kontinu dan f(x) adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka varians dari X didefinisikan sebagai:

$$\boxed{Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 .f(x)\,dx}$$

Jika kita menguraikan lebih lanjut perumusan varians dalam Definisi 6.5, maka akan diperoleh hasil sbb:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X - \mu)^2 \\
&= E(X^2 - 2.\mu.X + \mu^2) \\
&= E(X^2) - 2.\mu.E(X) + \mu^2 \\
&= E(X^2) - 2.\mu.\mu + \mu^2 \\
Var(X) &= E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}
$$

Jadi:

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Dengan demikian, penghitungan varians dari sebuah peubah acak dapat dilakukan dengan dua rumus, yaitu:

1. Perumusan varians berdasarkan fungsi peluang atau fungsi densitas.
   Perumusan varians dari peubah acak diskrit bisa dilihat dalam Definisi 6.6 dan perumusan varians dari peubah acak kontinu bisa dilihat dalam Definisi 6.7.
2. Perumusan varians berdasarkan penguraian lebih lanjut dari rumus varians.
   Dalam hal ini, penghitungan variansnya berlaku untuk peubah acak diskrit dan kontinu.

Berikut ini akan dijelaskan beberapa sifat dari varians.

Dalil 6.2: SIFAT-SIFAT VARIANS

1. Jika c adalah sebuah konstanta, maka:

$$\boxed{Var(c) = 0}$$

2. Jika X adalah peubah acak dan c adalah sebuah konstanta, maka:

$$\boxed{Var(X + c) = Var(X)}$$

3. Jika a dan b adalah dua buah konstanta dan X adalah peubah acak, maka:

$$\boxed{Var(aX + b) = a^2. Var(X)}$$

PENDEKATAN NILAI E[H(X)] DAN VAR[H(X)]

Berikut ini kita akan menjelaskan penghitungan nilai ekspektasi dan varians dari fungsi peubah acak, khususnya peubah acak kontinu secara pendekatan.

Misalnya H(X) adalah fungsi dari peubah acak kontinu X. Kemudian kita bisa menghitung nilai ekspektasi dari H(X), yaitu E[H(X)], dan nilai varians dari H(X), yaitu Var[H(X)]. Akan tetapi, kadang-kadang kita mengalami kesulitan dalam penghitungannya. Hal ini mungkin disebabkan karena bentuk dari H(X) yang rumit. Untuk mengatasinya, berikut ini akan dijelaskan sebuah cara untuk menghitung E[H(X)] dan Var[H(X)] secara pendekatan.

Jika Y = H(X) dan X = μ, maka dengan menggunakan perluasan deret Taylor diperoleh:

$$Y = H(\mu) + (x-\mu).H'(\mu) + \frac{(x-\mu)^2}{2}.H''(\mu) + R$$

dengan R adalah sisa.
Maka:

1. $E(Y) = E\left[H(\mu) + (x-\mu).H'(\mu) + \frac{(x-\mu)_2}{2}.H''(\mu) + R\right]$

$= E[H(\mu)] + E(X-\mu).H'(\mu) + (½).E(X-\mu)^2.H''(\mu) + E(R)$

$= H(\mu) + [E(X) - E(\mu)].H'(\mu) + (½).E(X-\mu)^2.H''(\mu) + R$

$\approx H(\mu) + (\mu - \mu).H'(\mu) + (½).Var(X).H''(\mu)$

$\approx H(\mu) + (½).Var(X).H''(\mu)$

$E(Y) \approx H(\mu) + (½).\sigma^2.H''(\mu)$

Jadi:

$$E(Y) \approx H(\mu) + (½).H''(\mu).\sigma^2$$

2. Bentuk Y di atas bisa ditulis sbb:

$$Y = H(\mu) + (X-\mu).H'(\mu) + R_1$$

dengan: $R_1 = \frac{(X-\mu)^2}{2}.H''(\mu) + R$

Maka: $Var(Y) = Var[H(\mu) + (X-\mu).H'(\mu) + R_1]$

$= Var[(X-\mu).H'(\mu)] + Var(R_1)$

$= [H'(\mu)]^2.Var(X) + Var(R_1)$

$Var(Y) \approx [H'(\mu)]^2.Var(X)$

Jadi :

$$Var(Y) \approx [H'(\mu)]^2.Var(X)$$

MOMEN

Pada bagian sebelumnya, kita dapat menghitung nilai E(X) dan $E(X^2)$. Dengan kata lain, kita hanya dapat menghitung nilai ekspektasi dari peubah acak X dengan pangkatnya paling tinggi 2. Berikut ini akan dijelaskan perumusan secara umum dalam penghitungan nilai ekspektasi dari peubah acak X dengan pangkatnya lebih dari 2.

Definisi 6.8: MOMEN

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka momen ke-k (dinotasikan dengan μ'_k) didefinisikan sebagai:

$$\mu'_k = E(X^k) \qquad , k = 1,2,3,...$$

Momen dari peubah acak diskrit secara umum ditentukan berdasarkan Definisi 6.9.

Definisi 6.9: MOMEN DISKRIT

Jika X adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka momen ke-k (dinotasikan dengan μ'_k) didefinisikan sebagai:

$$\boxed{\mu'_k = \sum_x x^k . p(x)}$$

Momen dari peubah acak kontinu secara umum ditentukan berdasarkan Definisi 6.10.

Definisi 6.10: MOMEN KONTINU

Jika X adalah peubah acak kontinu dan f(x) adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka momen ke-k (dinotasikan dengan μ'_k) didefinisikan sebagai:

$$\boxed{\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k . f(x)\, dx}$$

Pada bagian sebelumnya, kita sudah mengetahui bahwa varians dari sebuah peubah acak adalah nilai ekspektasi dari pangkat dua untuk penyimpangan peubah acak tersebut terhadap rataannya. Berikut ini akan dijelaskan perumusan umum untuk menghitung nilai ekspektasi dari pangkat k untuk penyimpangan sebuah peubah acak terhadap rataannya yang dinamakan *momen sekitar rataan*.

Definisi 6.11: MOMEN SEKITAR RATAAN

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka momen sekitar rataan ke-k (dinotasikan dengan μ_k) didefinisikan sebagai:

$$\boxed{\mu'_k = E(X - \mu)^k} \qquad , k = 0,1,2,3,...$$

Berdasarkan perumusan di atas, kita akan menghitung nilai momen sekitar rataan untuk beberapa nilai k.

Untuk k = 0

$\mu_0 = E(X – \mu)^0 = E(1) = 1$

Untuk k = 1

$\mu_1 = E(X – \mu)^1 = E(X) – \mu = \mu – \mu = 0$

Untuk k = 2

$\mu_2 = E(X – \mu)^2 = Var(X)$

Dan seterusnya.

Momen sekitar rataan dari peubah acak diskrit secara umum ditentukan berdasarkan Definisi 6.12.

Definisi 6.12: MOMEN SEKITAR RATAAN DISKRIT

Jika X adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka momen ke-k (dinotasikan dengan μ'_k) didefinisikan sebagai:

$$\boxed{\mu_k = \sum_x (x - \mu)^k . p(x)}$$

Momen sekitar rataan dari peubah acak kontinu secara umum ditentukan berdasarkan Definisi 6.13.

Definisi 6.13: MOMEN SEKITAR RATAAN KONTINU

Jika X adalah peubah acak kontinu dan f(x) adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka momen sekitar rataan ke-k (dinotasikan dengan μ_k) didefinisikan sebagai:

$$\boxed{\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k . f(x)\, dx}$$

Dengan menggunakan dalil binomial, kita dapat menurunkan hubungan antara momen dan momen sekitar rataan dari sebuah peubah acak.

Berdasarkan definisi momen sekitar rataan diskrit, maka:

$\mu_k = E(X - \mu)^k$

$$= E\left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i (-\mu)^{k-i}\right]$$

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu'_i . (-\mu)^{k-i}$$

Jadi:

$$\boxed{\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu'_i . (-\mu)^{k-i}}$$

Kemudian kita akan mensubstitusikan beberapa nilai k kedalam rumus di atas.

Untuk k = 1

$$\mu_1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \mu'_i . (-\mu)^{1-i}$$

$$= \binom{1}{0} \mu'_0 . (-\mu)^1 + \binom{1}{1} \mu'_1 . (-\mu)^0$$

$= -\mu + \mu'_1$

$\mu_1 = -\mu + \mu = 0$

Untuk k = 2

$$\mu_2 = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} \mu'_i . (-\mu)^{2-i}$$

$$= \binom{2}{0} \mu'_0 . (-\mu)^2 + \binom{2}{1} \mu'_1 . (-\mu)^1 + \binom{2}{2} \mu'_2 . (-\mu)^0$$

$= \mu^2 - 2.\mu'_1.\mu + \mu'_2$

$\mu_2 = \mu'_2 - \mu^2$

Untuk k = 3

$$\mu_3 = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \mu'_i . (-\mu)^{3-i}$$

$$= \binom{3}{0}\mu'_0.(-\mu)^3 + \binom{3}{1}\mu'_1.(-\mu)^2 + \binom{3}{2}\mu'_2.(-\mu)^1 + \binom{3}{3}\mu'_3.(-\mu)^0$$

$= -\mu^3 + 3.\mu'_1.\mu^2 - 3\ \mu'_2.\mu + \mu'_3$

$\mu_3 = \mu'_3 - 3\ \mu'_2.\mu + 2\ \mu^3$

Dan seterusnya.

Dari hasil penurunan di atas, ternyata penghitungan momen sekitar rataan bisa dilakukan melalui momen. Namun demikian, penghitungan momen juga bisa dilakukan melalui momen sekitar rataan. Hal ini bisa dilihat pada uraian berikut ini.

Berdasarkan definisi momen, maka:

$\mu'_k = E(X^k)$

$= E[(X - \mu) + \mu]^k$

$$= E\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(X-\mu)^i(\mu)^{k-i}\right]$$

$$\mu'_k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mu_i.(\mu)^{k-i}$$

Jadi:

$$\boxed{\mu'_k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mu_i.\mu^{k-i}}$$

Kemudian kita akan mensubstitusikan beberapa nilai k kedalam rumus di atas.

Untuk k = 1

$$\mu'_1 = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}\mu_i.\mu^{1-i}$$

$$= \binom{1}{0}\mu_0.\mu^1 + \binom{1}{1}\mu_1.\mu^0$$

$= \mu + \mu_1$

$\mu_1 = \mu + 0 = \mu$

Untuk k = 2

$$\mu'_2 = \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}\mu_i.\mu^{2-i}$$

$$= \binom{2}{0}\mu_0.\mu^2 + \binom{2}{1}\mu_1.\mu^1 + \binom{2}{2}\mu_2.\mu^0$$

$= \mu^2 + 2.\mu_1.\mu + \mu_2$

$\mu'_2 = \mu^2 + \mu_2$

Untuk k = 3

$$\mu'_3 = \sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\mu_i.\mu^{3-i}$$

$$= \binom{3}{0}\mu_0.\mu^3 + \binom{3}{1}\mu_1.\mu^2 + \binom{3}{2}\mu_2.\mu^1 + \binom{3}{3}\mu_3.\mu^0$$

$= \mu^3 + 3.\mu_1.\mu^2 + 3\ \mu_2.\mu + \mu_3$

$\mu'_3 = \mu_3 + 3\ \mu_2.\mu + \mu_3$

Dan seterusnya.

FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN

Pada bagian sebelumnya, kita sudah membahas momen ke-k yang dinotasikan dengan μ'_k. Momen ini bisa juga diperoleh melalui besaran lainnya, yang dinamakan *fungsi pembangkit momen*. Sehingga fungsi pembangkit momen merupakan sebuah fungsi yang dapat menghasilkan momen-momen. Selain itu, penentuan distribusi baru dari peubah acak yang baru merupakan kegunaan lain dari fungsi pembangkit momen.

Definisi 6.14: FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka fungsi pembangkit momen dari X (dinotasikan dengan $M_X(t)$) didefinisikan sebagai:

$$\boxed{M_X(t) = E(e^{tX})}$$

u*ntuk $-h < t < h$ dan $h > 0$.*

Fungsi pembangkit momen dari peubah acak diskrit secara umum ditentukan berdasarkan Definisi 6.15.

Definisi 6.15: FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN DISKRIT

Jika X adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$\boxed{M_X(t) = \sum_x e^{tx}.p(x)}$$

Fungsi pembangkit momen dari peubah acak kontinu secara umum ditentukan berdasarkan Definisi 6.16.

Definisi 6.16: FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN KONTINU

Jika X adalah peubah acak kontinu dan f(x) adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$\boxed{M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}.f(x)\,dx}$$

Dalil 6.3: PENURUNAN MOMEN BERDASARKAN FUNGSIPEMBANGKIT MOMEN

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu dan $M_X(t)$ adalah fungsi pembangkit momennya, maka:

$$\boxed{M^{r}{}_{X}(t)\Big|_{t=0} = \mu'_r}$$

Berikut ini akan dijelaskan beberapa sifat dari fungsi pembangkit momen.

Dalil 6.4: SIFAT-SIFAT FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN

1. *Jika X adalah peubah acak dan c adalah sebuah konstanta, maka:*

$$\boxed{M_{cX}(t) = M_X(ct)}$$

2. *Jika X adalah peubah acak dan c adalah sebuah konstanta maka:*

$$\boxed{M_{X+c}(t) = e^{ct}.\ M_X(t)}$$

3. *Jika X adalah peubah acak dan a & b adalah dua buah konstanta, maka:*

$$\boxed{M_{(X+a)/b}(t) = e^{at/b}.\ M_X(t/b)}$$

6.8. PERTIDAKSAMAAN CHEBYSHEV

Berikut ini akan dijelaskan sebuah dalil yang dalam pembuktiannya didasarkan pada varians, yaitu dalil Chebyshev. Dalil ini diambil dari seorang ahli Matematika Rusia pada abad 19, yaitu P.L. Chebyshev.

Dalil 6.5: DALIL CHEBYSHEV

Jika μ dan σ masing-masing merupakan rataan dan simpangan baku dari peubah acak X, maka untuk setiap bilangan positif k peluang dari peubah acak X yang bernilai antara $\mu - k\sigma$ dan $\mu + k\sigma$ paling sedikit sebesar $1 - (1/k^2)$, dan ditulis:

$$\boxed{P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}}$$

Nilai peluang di atas merupakan batas bawah peluang dari peubah acak X yang berharga tertentu.

Kita bisa juga menghitung peluang dari peubah acak X yang bernilai lebih kecil atau sama dengan $\mu - k\sigma$ atau lebih besar atau sama dengan $\mu + k\sigma$, yang besarnya $1/k^2$ dan ditulis:

$$\boxed{P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}}$$