FILE : 11

RINGKASAN PERTEMUAN KETUJUH

STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH :

NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

B A N D U N G

EKSPEKTASI DUA PEUBAH ACAK

Dalam hal ini akan dibahas beberapa macam ukuran yang dihitung berdasarkan ekspektasi dari dua peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, yaitu nilai ekspektasi gabungan, ekspektasi bersyarat, rataan bersyarat, varians bersyarat, kovarians, fungsi pembangkit momen gabungan, koefisien korelasi, dan akibat kebebasan stokastik.
Jika kita mempunyai fungsi peluang atau fungsi densitas gabungan dari dua peubah acak, maka kita sudah menjelaskan penghitungan nilai peluang dari dua peubah acak yang berharga tertentu. Selain itu, kita juga bisa menentukan beberapa ukuran yang didasarkan pada fungsi peluang atau fungsi densitas gabungan.

NILAI EKSPEKTASI GABUNGAN

Penghitungan nilai ekspektasi gabungan dari dua peubah acak diskrit ditentukan berdasarkan Definisi 7.1.
Definisi 7.1: NILAI EKSPEKTASI GABUNGAN DISKRIT

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, p(x,y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari (X,Y) di (x,y), dan v(X,Y) adalah fungsi dari peubah acak X dan Y; maka nilai ekspektasi gabungan dari v(X,Y) (dinotasikan dengan E[v(X,Y)]) dirumuskan sebagai:

$$E[v(X,Y)] = \sum_{x}\sum_{y} v(x,y).p(x,y)$$

Penghitungan nilai ekspektasi gabungan dari dua peubah acak kontinu ditentukan berdasarkan Definisi 7.2.
Definisi 7.2: NILAI EKSPEKTASI GABUNGAN KONTINU

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, f(x,y) adalah nilai fungsi densitas gabungan dari (X,Y) di (x,y), dan v(X,Y) adalah fungsi dari peubah acak X dan Y; maka nilai ekspektasi gabungan dari v(X,Y) (dinotasikan dengan E[v(X,Y)]) dirumuskan sebagai:

$$E[v(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v(x,y).f(x,y)\; dx\, dy$$

EKSPEKTASI BERSYARAT

Penentuan ekspektasi bersyarat dari sebuah peubah acak diskrit diberikan peubah acak diskrit lainnya, baik ekspektasi bersyarat dari X diberikan Y = y maupun ekspektasi bersyarat dari Y diberikan X = x dijelaskan dalam Definisi 7.3.
Definisi 7.3: EKSPEKTASI BERSYARAT DISKRIT

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, p'(x | y) dalah nilai fungsi peluang bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan p''(y | x) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka ekspektasi bersyarat dari u(X) diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut:

$$E\left[u(X)\middle|y\right]=\sum_{x} u(x).p'(x|y)$$

dan ekspektasi bersyarat dari v(Y) diberikan X = x dirumuskan sebagai berikut:

$$E\left[v(Y)\middle|x\right]=\sum_{y} v(y).p''(y|x)$$

Penentuan ekspektasi bersyarat dari sebuah peubah acak kontinu diberikan peubah acak kontinu lainnya, baik ekspektasi bersyarat dari X diberikan Y = y maupun ekspektasi bersyarat dari Y diberikan X = x dijelaskan dalam Definisi 7.4.

Definisi 7.4: EKSPEKTASI BERSYARAT KONTINU

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, g(x | y) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan h(y | x) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka ekspektasi bersyarat dari u(X) diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut:

$$E\left[u(X)\middle|y\right]=\int_{-\infty}^{\infty} u(x).g(x|y)\, dx$$

dan ekspektasi bersyarat dari v(Y) diberikan X = x dirumuskan sebagai berikut:

$$E\left[v(Y)\middle|x\right]=\int_{-\infty}^{\infty} v(y).h(y|x)\, dy$$

RATAAN BERSYARAT

Berikut ini akan dijelaskan definisi rataan bersyarat dari sebuah peubah acak diskrit diberikan peubah acak diskrit lainnya, baik rataan bersyarat dari X diberikan Y = y maupun rataan bersyarat dari Y diberikan X = x.

Definisi 7.5: RATAAN BERSYARAT DISKRIT

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, p'(x | y) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan p''(y | x) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka ekspektasi bersyarat dari X diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut:

$$E(X|y)=\sum_{x} x.p'(x|y)$$

dan ekspektasi bersyarat dariY diberikan X = x dirumuskan sebagai berikut:

$$E(Y|x)=\sum_{y} y.p''(y|x)$$

Berikut ini akan dijelaskan rataan bersyarat dari sebuah peubah acak kontinu diberikan peubah acak kontinu lainnya, baik rataan bersyarat dari X diberikan Y = y maupun rataan bersyarat dari Y diberikan X = x.

Definisi 7.6: RATAAN BERSYARAT KONTINU

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, g(x | y) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan h(y | x*) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka rataan bersyarat dari X diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut:*

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x.g(x|y)dx$$

dan rataan bersyarat dari Y diberikan X = x dirumuskan sebagai berikut:

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y.h(y|x)dy$$

Berikut ini akan dijelaskan beberapa dalil yang berkaitan dengan rataan bersyarat.

Dalil 7.1: EKSPEKTASI RATAAN BERSYARAT

1. $E[E(X|y)] = E(X)$
2. $E[E(Y|x)] = E(Y)$

Dalil 7.2:

Jika dua peubah acak X dan Y saling bebas, maka:

1. $E(X|y) = E(X)$
2. $E(Y|x) = E(Y)$

PERKALIAN DUA MOMEN

Misalnya kita mempunyai dua peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Kemudian kita bisa menghitung momen dari masing-masing peubah acak, baik momen sekitar pusat maupun momen sekitar rataan. Selain itu, kita sebenarnya bisa juga menentukan perkalian dua momen, yaitu perkalian dua momen sekitar pusat dan perkalian dua momen sekitar rataan.

Penentuan perkalian dua momen sekitar pusat dan sekitar rataan dari peubah acak diskrit ditentukan berdasarkan Definisi 7.7.

Definisi 7.7: PERKALIAN DUA MOMEN DISKRIT

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, p(x,y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari X dan Y di (x,y), μ_x adalah rataan dari X, dan μ_y adalah rataan dari Y, maka perkalian momen sekitar pusat ke-r dan ke-s dari X dan Y (dinotasikan dengan $\mu'_{r,s}$) dirumuskan sebagai berikut:

$$\mu'_{r,s} = E(X^rY^s) = \sum_x \sum_y x^r y^s.p(x,y)$$

dan perkalian momen sekitar rataan ke-r dan ke-s dari X dan Y (dinotasikan dengan $\mu_{r,s}$) dirumuskan sebagai berikut:

$$\mu_{r,s} = E[(X - \mu_x)^r(Y - \mu_y)^s]$$

$$= \sum_x \sum_y (x-\mu_x)^r (y-\mu_y)^s.p(x,y)$$

dengan r = 0, 1, 2, 3, ... dan s = 0, 1, 2, 3, ...

Penentuan perkalian dua momen sekitar pusat dan sekitar rataan dari peubah acak kontinu ditentukan berdasarkan Definisi 7.8.

Definisi 7.8: PERKALIAN DUA MOMEN KONTINU

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, f(x,y) adalah nilai fungsi densitas gabungan dari X dan Y di (x,y), μ_x adalah rataan dari X, dan μ_y adalah rataan dari Y, maka perkalian momen sekitar pusat ke-r dan ke-s dari X dan Y (dinotasikan dengan $\mu'_{r,s}$) dirumuskan sebagai berikut:

$$\mu'_{r,s} = E(X^rY^s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s . f(x,y)\, dx\, dy$$

dan perkalian momen sekitar rataan ke0r dan ke-s dari X dan Y (dinotasikan dengan $\mu_{r,s}$) dirumuskan sebagai berikut:

$$\mu_{r,s} = E[(X - \mu_x)^r(Y - \mu_y)^s]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^r (y-\mu_y)^s . f(x,y)\, dx\, dy$$

dengan r = 0, 1, 2, 3, ... dan s = 0, 1, 2, 3, ...

KOVARIANS

Berikut ini akan dijelaskan sebuah ukuran yang merupakan hal khusus dari perkalian dua momen, yaitu kovarians.

Definisi 7.9: KOVARIANS

Perkalian momen sekitar rataan ke-1 dan ke-1 dari peubah acak X dan Y disebut kovarians dari X dan Y dan dinotasikan dengan Kov(X,Y) atau σ_{xy}. dengan

$$Kov(X,Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

Penghitungan nilai kovarians dari peubah acak diskrit ditentukan berdasarkan Definisi 7.10.

Definisi 7.10: KOVARIANS DISKRIT

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, p(x,y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari X dan Y di (x,y), μ_x adalah rataan dari x, dan μ_y adalah rataan dari Y, maka nilai kovarians dari X dan Y dirumuskan sebagai berikut:

$$Kov(X,Y) = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y) p(x,y)$$

Penghitungan nilai kovarians dari peubah acak kontinu ditentukan berdasarkan Definisi 7.11.

Definisi 7.11: KOVARIANS KONTINU

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, f(x,y) adalah nilai fungsi densitas gabungan dari X dan Y di (x,y), μ_x adalah rataan dari x, dan μ_y adalah rataan dari Y, maka nilai kovarians dari X dan Y dirumuskan sebagai berikut:

$$Kov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y) f(x,y)\, dx\, dy$$

Perumusan lain nilai kovarians dari X dan Y, baik diskrit maupun kontinu dapat dilihat dalam Dalil 7.3.

Dalil 7.3: PERUMUSAN KOVARIANS UMUM

$$\boldsymbol{Kov(X,Y) = \mu'_{1,1} - \mu_x.\mu_y}$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 7.9, maka:

$$\begin{aligned} Kov(X,Y) &= E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \\ &= E(XY - X.\mu_y - \mu_x Y + \mu_x \mu_y) \\ &= E(XY) - E(X).\mu_y - \mu_x.E(Y) + \mu_x \mu_y) \\ &= E(XY) - \mu_x \mu_y - \mu_x \mu_y + \mu_x \mu_y \\ &= E(XY) - \mu_x \mu_y \end{aligned}$$

$Kov(X,Y) = \mu'_{1,1} - \mu_x \mu_y$ (terbukti)

Nilai kovarians dari dua peubah acak X dan Y mempunyai tiga
kemungkinan, yaitu:

1. $\text{Kov}(X,Y) = 0$
2. $\text{Kov}(X,Y) < 0$
3. $\text{Kov}(X,Y) > 0$

Dalam hal ini, jika X dan Y saling bebas, maka nilai kovariansnya sama dengan nol. Sebaliknya, apabila X dan Y mempunyai nilai kovarians sama dengan nol, maka X dan Y belum tentu bebas.