FILE : 12

RINGKASAN PERTEMUAN KESEMBILAN

STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH :

NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

B A N D U N G

VARIANS BERSYARAT

Penentuan varians bersyarat dari sebuah peubah acak diberikan peubah acak lainnya, baik diskrit maupun kontinu dijelaskan dalam Definisi 7.12.

Definisi 7.12: VARIANS BERSYARAT UMUM

Jika X dan Y adalah dua peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka varians bersyarat dari X diberikan Y = y didefinisikan sebagai:

$$Var(X|y) = E[\{X - E(X|y)\}^2|y]$$

atau

$$Var(X|y) = E(X^2|y) - [E(X|y)]^2$$

dan varians bersyarat dari Y diberikan X = x didefinisikan sebagai:

$$Var(Y|x) = E[\{Y - E(Y|x)\}^2|x]$$

atau

$$Var(Y|x) = E(Y^2|x) - [E(Y|x)]^2$$

Penentuan varians bersyarat dari sebuah peubah acak diskrit diberikan peubah acak diskrit lainnya, baik varians bersyarat dari X diberikan Y = y maupun varians bersyarat dari Y diberikan X = x dijelaskan dalam Definisi 7.13.

Definisi 7.13: VARIANS BERSYARAT DISKRIT

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, p'(x|y) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan p''(y|x) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka varians bersyarat dari X diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut:

$$Var(X|y) = \sum_x [x - E(X|y)]^2 . p'(x|y)$$

dan varians bersyarat dari Y diberikan X = x dirumuskan sebagai berikut:

$$Var(Y|x) = \sum_y [y - E(Y|x)]^2 . p''(y|x)$$

Penentuan varians bersyarat dari sebuah peubah acak kontinu diberikan peubah acak kontinu lainnya, baik varians bersyarat dari X diberikan Y = y maupun varians bersyarat dari Y diberikan X = x dijelaskan dalam Definisi 7.14.

Definisi 7.14: VARIANS BERSYARAT KONTINU

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, g(x|y) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan h(y|x) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka varians bersyarat dari X diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut:

$$Var(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X|y)]^2 . g(x|y)\, dx$$

dan varians bersyarat dari Y diberikan X = x dirumuskan sebagai berikut:

$$Var(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y|x)]^2 . h(y|x)\, dy$$

FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN GABUNGAN

Fungsi pembangkit momen gabungan dapat didefinisikan sebagai fungsi pembangkit momen yang diperoleh berdasarkan fungsi peluang gabungan atau fungsi densitas gabungan dari dua peubah acak. Dalam hal ini, fungsi pembangkit momen gabungan dapat digunakan untuk memperoleh momen-momen, baik untuk satu peubah acak maupun dua peubah acak.
Fungsi pembangkit momen gabungan dari dua peubah acak diskrit dijelaskan dalam Definisi 7.15.

Definisi 7.15: FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN GABUNGAN UMUM

> ***Jika X dan y adalah dua peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y (dinotasikan dengan $M(t_1,t_2)$) didefinisikan sebagai:***
>
> $$M(t_1,t_2) = E[\exp(t_1X + t_2Y)]$$
>
> ***untuk $-h_1 < t_1 < h_1$, $-h_2 < t_2 < h_2$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$.***

Fungsi pembangkit momen gabungan dari dua peubah acak diskrit dijelaskan dalam Definisi 7.16.

Definisi 7.16: FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN GABUNGAN DISKRIT

> ***Jika X dan Y adalah peubah acak diskrit dengan p(x,y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari X dan Y di (x,y), maka fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y didefinisikan sebagai:***
>
> $$M(t_1,t_2) = \sum_x \sum_y e^{t_1x+t_2y}.p(x,y)$$

Fungsi pembangkit momen gabungan dari dua peubah acak kontinu dijelaskan dalam Definisi 7.17.

Definisi 7.17: FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN GABUNGAN KONTINU

> ***Jika X dan Y adalah peubah acak kontinu dengan f(x,y) adalah nilai fungsi densitas gabungan dari X dan Y di (x,y), maka fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y didefinisikan sebagai:***
>
> $$M(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x+t_2y}.f(x,y)\,dx\,dy$$

Berdasarkan fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y, kita dapat menentukan fungsi pembangkit momen masing-masing dari X dan Y yang dinamakan ***fungsi pembangkit momen marginal dari X*** dan ***fungsi pembangkit momen marginal dari Y.***
Fungsi pembangkit momen marginal dari X diperoleh dari fungsi pembangkit momen gabungan dengan mensubstitusikan $t_2 = 0$, sehingga:

$$M(t_1,0) = M(t_1) = E[\exp(t_1X)]$$

Penentuan momen-momen dari peubah acak X berdasarkan fungsi pembangkit momennya digunakan rumus sebagai berikut:

$$\mu_x = E(X) = \frac{\partial M(t_1,0)}{\partial t_1}\bigg|_{t_1 = 0} = \frac{\partial M(0,0)}{\partial t_1}$$

$$E(X^2) = \frac{\partial^2 M(t_1,0)}{\partial t_1^2}\bigg|_{t_1 = 0} = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_1^2}$$

Adapun penentuan varians dari X digunakan rumus sebagai berikut:

$$Var(X) = \sigma_X{}^2 = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_1{}^2} - \left[\frac{\partial M(0,0)}{\partial t_1}\right]^2$$

Fungsi pembangkit momen marginal dari Y diperoleh dari fungsi pembangkit momen gabungan dengan mensubstitusikan $t_1 = 0$, sehingga:

$$M(0,t_2) = M(t_2) = E[\exp(t_2 Y)]$$

Penentuan momen-momen dari peubah acak Y berdasarkan fungsi pembangkit momennya digunakan rumus sebagai berikut:

$$\mu_2 = E(Y) = \left.\frac{\partial M(0,t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_2 = 0} = \frac{\partial M(0,0)}{\partial t_2}$$

$$E(Y^2) = \left.\frac{\partial^2 M(0,t_2)}{\partial t_2{}^2}\right|_{t_2 = 0} = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_2{}^2}$$

Adapun penentuan varians dari Y digunakan rumus sebagai berikut:

$$Var(Y) = \sigma_Y{}^2 = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_2{}^2} - \left[\frac{\partial M(0,0)}{\partial t_2}\right]^2$$

Adapun nilai E(XY) ditentukan dengan rumus sebagai berikut:

$$E(XY) = \left.\frac{\partial^2 M(t_1,t_2)}{\partial t_1\ \partial t_2}\right|_{t_1 = t_2 = 0} = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_1\ \partial t_2}$$

KOEFISIEN KORELASI

Penentuan derajat hubungan linier antara dua buah peubah acak digunakan ***koefisien korelasi***.

Rumus yang digunakan untuk menentukan derajat hubungan linier tersebut bisa dilihat dalam Definisi 7.18.

Definisi 7.18: KOEFISIEN KORELASI

> ***Jika X dan Y adalah dua peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka koefisien korelasi (dinotasikan dengan ρ) didefinisikan sebagai:***

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X).E(Y)}{\sqrt{\left\{E(X^2) - [E(X)]^2\right\}\left\{E(Y^2) - [E(Y)]^2\right\}}}$$

Selain itu, penghitungan koefisien korelasi ρ dapat juga dilakukan berdasarkan fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y. Rumus yang digunakannya sama seperti di atas, dengan mengganti:

a. E(XY) oleh $\frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_1 \ \partial t_2}$

b. E(X) oleh $\frac{\partial M(0,0)}{\partial t_1}$

c. E(X^2) oleh $\frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial {t_1}^2}$

d. E(Y) oleh $\frac{\partial M(0,0)}{\partial t_2}$

e. E(Y^2) oleh $\frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial {t_2}^2}$

Dalam hal ini, kelima besaran tersebut mempunyai pengertian sebagai berikut:

a. $\frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_1 \ \partial t_2}$

Turunan parsial dari M(t_1,t_2) terhadap t_1 dahulu, kemudian hasilnya diturunkan lagi terhadap t_2, dan selanjutnya t_1 dan t_2 disamakan dengan nol.

b. $\frac{\partial M(0,0)}{\partial t_1}$

Turunan parsial dari M(t_1,0) terhadap t_1, kemudian t_1 disamakan dengan nol.

c. $\frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial {t_1}^2}$

Turunan parsial dari M(t_1,0) terhadap t_1, kemudian hasilnya diturunkan lagi terhadap t_1, dan selanjutnya t_1 disamakan dengan nol.

d. $\frac{\partial M(0,0)}{\partial t_2}$

Turunan parsial dari M(0,t_2) terhadap t_2, kemudian t_2 disamakan dengan nol.

e. $\frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial {t_2}^2}$

Turunan parsial dari M(0,t_2) terhadap t_2, kemudian hasilnya diturunkan lagi terhadap t_2, dan selanjutnya t_2 disamakan dengan nol.

Dengan demikian, penghitungan derajat hubungan antara dua buah peubah acak X dan Y dapat digunakan dengan dua cara, yaitu:

1. perumusan ekspektasi

2. perumusan fungsi pembangkit momen gabungan

AKIBAT KEBEBASAN STOKASTIK

Kita sudah menjelaskan bahwa dua peubah acak dikatakan saling bebas, jika distribusi gabungannya sama dengan perkalian dari distribusi marginal masing-masing peubah acaknya. Beberapa akibat kebebasan stokastik dari dua peubah acak bisa dilihat dalam dalil-dalil berikut ini.

<u>Dalil 7.4</u>: AKIBAT PERTAMA KEBEBASAN STOKASTIK

Jika X dan Y adalah dua peubah acak yang saling bebas, maka:

$$E(XY) = E(X).E(Y)$$

<u>Dalil 7.5</u>: AKIBAT KEDUA KEBEBASAN STOKASTIK

Jika X dan Y adalah dua peubah acak yang saling bebas, maka:

$$E[(u(X).v(Y)] = E[u(X)].E[v(Y)]$$

<u>Dalil 7.6</u>: AKIBAT KETIGA KEBEBASAN STOKASTIK

Jika X dan Y adalah dua peubah acak yang saling bebas, maka:

$$M(t_1,t_2) = M_X(t_1).M_Y(t_2)$$

<u>Dalil 7.7</u>: AKIBAT KEEMPAT KEBEBASAN STOKASTIK

Jika X dan Y adalah dua peubah acak yang saling bebas, maka:

$$Kov(X,Y) = 0$$

<u>Dalil 7.8</u>: AKIBAT KELIMA KEBEBASAN STOKASTIK

Jika X dan Y adalah dua peubah acak yang saling bebas, maka:

$$\rho = 0$$

Dalam hal ini, hubungan antara kebebasan stokastik dua peubah acak dan koefisien korelasinya $\rho = 0$ sebagai berikut:

1. Jika X dan Y adalah dua peubah acak yang saling bebas, maka $\rho = 0$.
2. Jika $\rho = 0$, maka X dan Y adalah dua peubah acak yang belum tentu saling bebas.

<u>Dalil 7.9</u>: AKIBAT KEENAM KEBEBASAN STOKASTIK

Jika X dan Y adalah dua peubah acak yang saling bebas, maka:

$$\mu'_{r,s} = \mu'_r .\mu'_s$$