FILE : 13
RINGKASAN PERTEMUAN KE-10
STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH :

NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

B A N D U N G

DISTRIBUSI KHUSUS YANG DIKENAL

Kita sudah membahas fungsi peluang atau fungsi densitas, baik definisinya maupun sifatnya. Fungsi peluang atau fungsi densitas ini merupakan ciri dari sebuah distribusi, artinya fungsi peluang kepunyaan sebuah distribusi berpeubah acak diskrit dan fungsi densitas kepunyaan sebuah distribusi berpeubah acak kontinu.

Pada uraian berikut akan dijelaskan fungsi peluang atau fungsi densitas yang mempunyai bentuk tertentu. Hal ini berakibat peubah acaknya mengikuti suatu distribusi yang mempunyai nama tertentu pula. Distribusi yang mempunyai bentuk dan nama tertentu itu dinamakan ***distribusi khusus***.

Beberapa distribusi khusus dari peubah acak diskrit yang dikenal akan dibahas dalam Bab 8 dan beberapa distribusi khusus dari peubah acak kontinu yang dikenal akan dibahas dalam Bab 9.

BEBERAPA DISTRIBUSI KHUSUS DISKRIT DIKENAL

Dalam hal ini akan dibahas beberapa distribusi yang mempunyai bentuk fungsi peluang dan nama tertentu dari peubah acak diskrit, yaitu: distribusi Bernoulli, distribusi binomial, distribusi trinomial, distribusi Poisson, distribusi geometrik, dan distribusi hipergeometrik.

Pada uraian sebelumnya, kita sudah membahas fungsi peluang yang diperoleh berdasarkan eksperimen atau sifatnya. Fungsi peluang seperti itu bentuknya beraneka macam, sehingga bentuk tersebut tidak mempunyai nama. Selain itu, fungsi peluang bisa mempunyai bentuk yang tertentu dan nama tertentu pula. Distribusi yang mempunyai bentuk fungsi peluang dan nama tertentu itu dinamakan ***distribusi khusus diskrit.***

DISTRIBUSI BINOMIAL

Apabila sebuah eksperimen mempunyai dua hasil yang muncul, seperti "sukses" dan "gagal", dengan masing-masing peluangnya p dan (1 - p), maka peristiwa yang diperhatikan, baik sukses maupun gagal akan berdistribusi Bernoulli.

Definisi 8.1: FUNGSI PELUANG BERNOULLI

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Bernoulli, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = x) = p^x (1 - p)^{1 - x} \; ; x = 0, 1$$

Peubah acak X yang berdistribusi Bernoulli dikatakan juga ***peubah acak Bernoulli***.

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi Bernoulli adalah B(x;1,p), artinya peubah acak X berdistribusi Bernoulli dengan peristiwa yang diperhatikan, baik sukses maupun gagal dinyatakan dengan x, banyak eksperimen yang dilakukan satu kali, dan peluang terjadinya peristiwa yang diperhatikan, baik sukses maupun gagal sebesar p.

Sebuah eksperimen dikatakan mengikuti distribusi Bernoulli, jika eksperimen itu memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. Eksperimennya terdiri atas dua peristiwa, yaitu peristiwa yang diperhatikan (sering disebut peristiwa sukses) dan peristiwa yang tidak diperhatikan (sering disebut peristiwa gagal).
2. Eksperimennya hanya dilakukan sekali saja.

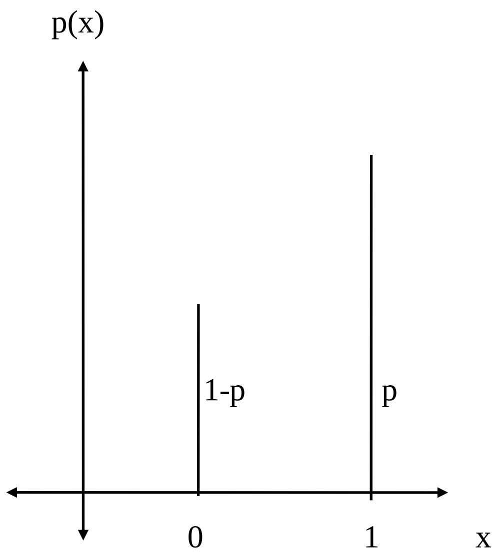
Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi Bernoulli bisa dilihat dalam Dalil 8.1.

Dalil 8.1: PARAMETER DISTRIBUSI BERNOULLI

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi Bernoulli sebagai berikut:

1. $\mu = p$
2. $\sigma^2 = p(1 - p)$
3. $M_X(t) = (1 - p) + p.e^t \; ; \; t \in \Re$

Grafik dari fungsi peluang distribusi Bernoulli sebagai berikut:



GAMBAR 8.1

GRAFIK FUNGSI PELUANG DISTRIBUSI BERNOULLI

DISTRIBUSI BINOMIAL

Misalnya kita melakukan suatu eksperimen yang hanya menghasilkan dua peristiwa, seperti peristiwa sukses (S) dan peristiwa gagal (G)..

Peluang terjadinya peristiwa S, P(S), sebesar p dan peluang terjadinya peristiwa G, P(G), sebesar 1 - p.

Kemudian eksperimen itu diulang sampai n kali secara bebas. Dari n kali pengulangan itu, peristiwa S terjadi sebanyak x kali dan sisanya (n - x) kali terjadi peristiwa G. Kita akan menghitung besar peluang bahwa banyak peristiwa sukses dalam eksperimen itu sebanyak x kali.

Dalam hal ini, salah satu susunan dari pengulangan eksperimen sampai n kali itu adalah:

$$\underbrace{S\ S\ S\ \ldots\ S}_{x \text{ kali}}\ \underbrace{G\ G\ G\ \ldots\ G}_{(n - x) \text{ kali}}$$

Karena setiap pengulangan bersifat bebas, P(S) = p dan P(G) = 1 - p berharga tetap untuk setiap pengulangan percobaan, maka besar peluang dari peristiwa susunan di atas adalah:

$$\begin{aligned} P(S\ S\ S\ \ldots\ S\ G\ G\ G\ \ldots\ G) &= P(S).P(S).P(S).\ \ldots\ .\ P(S).P(G).P(G).P(G).\ \ldots\ .\ P(G) \\ &= (p)(p)(p)\ldots(p)(1 - p)(1 - p)(1 - p)\ldots(1 - p) \\ &= p^x\,(1 - p)^{n - x} \end{aligned}$$

Karena banyak susunan keseluruhan peristiwa S terjadi ada $\binom{n}{x}$ cara, maka peluang bahwa peristiwa S terjadi dalam x kali adalah:

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\ p^x\,(1 - p)^{n - x}$$

Berdasarkan uraian di atas, kita dapat mendefinisikan distribusi binomial.

<u>Definisi 8.2</u>: FUNGSI PELUANG BINOMIAL

Peubah acak X dikatakan berdistribusi binomial, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x}\ p^x(1 - p)^{n - x}\ \boldsymbol{;\ x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n}$$

Peubah acak X yang berdistribusi binomial dikatakan juga ***peubah acak binomial***.

Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi binomial adalah B(x;n,p), artinya peubah acak X berdistribusi binomial dengan banyak pengulangan eksperimen sampai n kali, peluang terjadi peristiwa sukses sebesar p, dan banyak peristiwa sukses terjadi ada x.

Sebuah eksperimen dikatakan mengikuti distribusi binomial, jika eksperimen itu memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. Eksperimennya terdiri atas dua peristiwa, seperti sukses dan gagal.
2. Eksperimennya diulang beberapa kali dan ditentukan banyak pengulangannya.

3. peluang terjadinya peristiwa sukses dan gagal pada setiap pengulangan eksperimen bersifat tetap.
4. Setiap pengulangan eksperimen bersifat bebas.

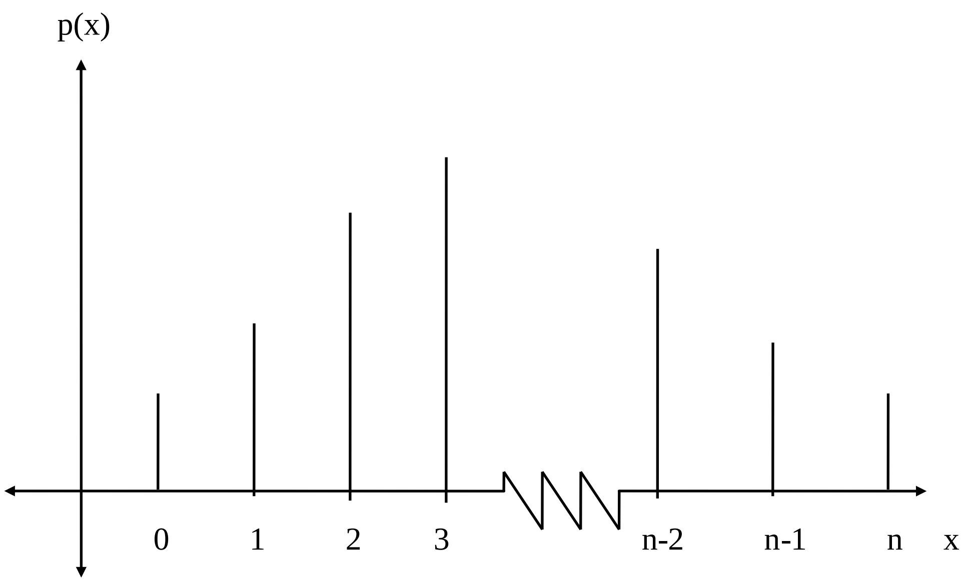
Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial bisa dilihat dalam Dalil 8.2.

Dalil 8.2: PARAMETER DISTRIBUSI BINOMIAL

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial sebagai berikut:

1. $\mu = np$
2. $\sigma^2 = np(1 - p)$
3. $M_X(t) = [(1 - p) + p.e^t]^n \; ; \; t \in \Re$

Grafik dari fungsi peluang distribusi binomial bisa dilihat dalam Gambar 8.2.



GAMBAR 8.2

GRAFIK FUNGSI PELUANG DISTRIBUSI BINOMIAL

DISTRIBUSI TRINOMIAL

Distribusi binomial bisa diperluas menjadi distribusi trinomial.

Definisi 8.3: FUNGSI PELUANG TRINOMIA

Peubah acak X dan Y dikatakan berdistribusi trinomial, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x,y)=\frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!}\,p_1^{\,x}\,p_2^{\,y}\,p_3^{\,n-x-y}\;;\;\boldsymbol{x+y\le n}$$

$$\boldsymbol{p_1+p_2+p_3=1}$$

Peubah acak X yang berdistribusi trinomial dikatakan juga ***peubah acak trinomial***.

Penulisan notasi dari peubah acak X dan Y yang berdistribusi trinomial adalah T(x,y;n,p_1,p_2), artinya peubah acak X dan Y berdistribusi trinomial dengan banyak pengulangan eksperimennya sampai n kali, peluang terjadi peristiwa sukses pertama dan kedua berturut-turut $p_1(x)$ dan $p_2(y)$, dan banyak peristiwa sukses pertama dan kedua masing-masing x dan y. Fungsi pembangkit momen dari distribusi trinomial bisa dilihat dalam Dalil 8.3.

Dalil 8.3: FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN GABUNGAN TRINOMIAL

Fungsi pembangkit momen dari distribusi trinomial adalah:

$$M(t_1,t_2)=\left(p_1.e^{t_1}+p_2.e^{t_2}+p_3\right)^n\;;\;\boldsymbol{t_1,t_2\in\Re}$$

Berdasarkan fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y, kita bisa menentukan fungsi pembangkit momen marginal masing-masing dari X dan Y.

Fungsi pembangkit momen marginal dari X adalah:

$$M_X(t_1)=M(t_1,0)=\left(p_1.e^{t_1}+p_2+p_3\right)^n$$

$$M_X(t_1)=M(t_1,0)=\left[p_1.e^{t_1}+(1-p_1)\right]^n\;;\;t_1\in\Re$$

Ternyata bentuk di atas merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial dengan banyak pengulangan eksperimennya sampai n kali dan peluang terjadinya peristiwa sukses pertama sebesar p_1, sehingga bisa ditulis:

$$X \sim B(x;n,p_1)$$

Maka fungsi peluang dari X berbentuk:

$$p(x)=\binom{n}{x}\,p_1^{\,x}\,(1-p_1)^{n-x}\;;\;x=0,1,2,3,\ldots,n$$

Rataan dan varians dari X adalah:

- $E(X) = n.p_1$
- $Var(X) = n.p_1(1 - p_1)$

Fungsi pembangkit momen marginal dari Y adalah:

$$M_Y(t_2) = M(0, t_2) = (p_1 + p_2.e^{t_2} + p_3)^n$$

$$M_Y(t_2) = M(0, t_2) = \left[p_2.e^{t_2} + (1 - p_2)\right]^n \text{; } t_2 \in \Re$$

Ternyata bentuk di atas merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial dengan banyak pengulangan eksperimennya sampai n kali dan peluang terjadinya peristiwa sukses kedua sebesar p_2, sehingga bisa ditulis:

$$Y \sim B(y;n,p_2)$$

Maka fungsi peluang dari Y berbentuk:

$$p(y) = \binom{n}{y} p_2^{\ y}(1 - p_2)^{n-y} \text{ ; } y = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$$

Rataan dan varians dari Y adalah:

- $E(Y) = n.p_2$
- $Var(Y) = n.p_2(1 - p_2)$

Dari uraian di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa jika X dan Y berdistribusi trinomial, maka distribusi marginal masing-masing dari X dan Y adalah distribusi binomial.

Distribusi bersyarat dari X diberikan Y = y berasal dari distribusi binomial dengan banyak pengulangan eksperimennya sampai (n - y) dan peluang terjadinya peristiwa sukses sebesar $p_1/(1-p_2)$, sehingga bisa ditulis:

$$X \mid y \sim B\left(x; n-y, \frac{p_1}{1-p_2}\right)$$

Dan distribusi bersyarat dari Y diberikan X = x berasal dari distribusi binomial dengan banyak pengulangan eksperimennya sampai (n - x) dan peluang terjadinya peristiwa sukses sebesar $p_2/(1-p_1)$, sehingga bisa ditulis:

$$Y \mid x \sim B\left(y; n-x, \frac{p_2}{1-p_1}\right)$$