FILE : 14
RINGKASAN PERTEMUAN KE-11
STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH :

NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

BANDUNG

DISTRIBUSI POISSON

Distribusi Poisson ini diperoleh dari distribusi binomial, apabila dalam distribusi binomial berlaku syarat-syarat sebagai berikut:

a. banyak pengulangan eksperimennya sangat besar ($n \to \infty$).

b. peluang terjadinya peristiwa yang diperhatikan mendekati nol ($p \to 0$).

c. perkalian $n.p = \lambda$, sehingga $p = \lambda/n$.

Berikut ini akan diberikan penurunan fungsi peluang distribusi Poisson berdasarkan fungsi peluang distribusi binomial dengan menggunakan persyaratan di atas.

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(x-1)]}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n.n\left(1-\frac{1}{n}\right).n\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots .n\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!} . \frac{\lambda^x}{n^x} . \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= \frac{n.n^{x-1}}{n^x} . \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots .\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!} . \lambda^x . \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n . \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$\lim_{n\to\infty} p(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n.n^{x-1}}{n^x} . \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots .\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!} . \lambda^x . \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n . \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\right]$$

Kita akan menghitung harga limitnya satu per satu.

- $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$

- $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1$

Sehingga akan diperoleh:

$$\lim_{n \to \infty} p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}$$

Jadi distribusi pendekatannya adalah:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!} \text{ ; x = 0, 1, 2, 3, …}$$

Dalam prakteknya, distribusi Poisson akan merupakan distribusi pendekatan yang baik dari distribusi binomial, jika dalam distribusi binomial berlaku:

- $n \geq 100$ dan $np \leq 10$
- $n \geq 20$ dan $p \leq 0{,}05$

Berdasarkan uraian di atas, kita dapat mendefinisikan distribusi Poisson.

Definisi 8.4: FUNGSI PELUANG POISSON

Peubah acak X dikayakan berdistribusi Poisson, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!} \textbf{ ; } \boldsymbol{x} \textbf{ = 0, 1, 2, 3, …}$$

Peubah acak X yang berdistribusi Poisson dikatakan juga ***peubah acak Poisson.***

Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi Poisson adalah $P(x;\lambda)$, artinya peubah acak X berdistribusi Poisson dengan parameter λ.

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson bisa dilihat dalam Dalil 8.4.

Dalil 8.4: PARAMETER DISTRIBUSI POISSON

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson sebagai berikut:

1. $\mu = \lambda$
2. $\sigma^2 = \lambda$
3. $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$; $t \in \Re$

DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Misalnya kita melakukan suatu eksperimen yang hanya menghasilkan dua peristiwa, seperti peristiwa sukses (S) dan peristiwa gagal (G).

Peluang terjadinya peristiwa S, P(S), sebesar p dan peluang terjadinya peristiwa G, P(G) sebesar 1 - p.

Kemudian eksperimen itu diulang beberapa kali sampai peristiwa S terjadi pertama kali.

Jika peubah acak X menyatakan banyak eksperimen dan pengulangannya yang dilakukan sampai peristiwa S terjadi pertama kali, maka X = x artinya banyak eksperimen dan pengulangannya yang dilakukan sampai menghasilkan peristiwa S terjadi pertama kali, adalah x kali. Ini berarti bahwa sampai pengulangan ke-(x - 2) menghasilkan peristiwa G dan pada pengulangan ke-(x-1) menghasilkan peristiwa S. Kita akan menghitung peluang bahwa peristiwa S terjadi pertama kali pada pengulangan eksperimen ke-(x-1). Susunan yang akan terjadi pada eksperimen itu adalah:

$$\begin{array}{lcccccc}
 & \multicolumn{6}{c}{x \text{ kali}} \\
 & G & G & G \;\dots & G & G & S \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 1-p & 1-p & 1-p & 1-p & 1-p & p \\
\text{Pengulangan ke-:} & & 1 & 2 & x-3 & x-2 & x-1
\end{array}$$

Karena setiap pengulangan bersifat bebas, P(S) = p dan P(G) = 1 - p berharga tetap untuk setiap pengulangan eksperimen, maka peluang dari peristiwa susunan di atas adalah:

$$\begin{aligned}
P(G\,G\,G \dots G\,G\,S) &= P(G).P(G).P(G).\ \dots\ .P(G).P(G).P(S) \\
&= (1 - p)(1 - p)(1 - p)\dots(1 - p)(1 - p)(p)
\end{aligned}$$

$$P(G\,G\,G \dots G\,G\,S) = (1 - p)^{x - 1}.p$$

Sehingga peluang bahwa peristiwa sukses terjadi pertama kali pada pengulangan eksperimen ke-x adalah:

$$P(X = x) = (1 - p)^{x - 1}.p$$

Berdasarkan uraian di atas, kita dapat mendefinisikan distribusi geometrik.

<u>Definisi 8.5</u>: FUNGSI PELUANG GEOMETRIK

Peubah acak X dikatakan berdistribusi geometrik, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = x) = (1 - p)^{x-1}.p \; ; x = 1, 2, 3, \ldots$$

Peubah acak X yang berdistribusi geometrik disebut juga ***peubah acak geometrik.***

Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi geometrik adalah X ~ G(x;p), artinya peubah acak X berdistribusi geometrik dengan banyak pengulangan eksperimennya sampai x kali dan peluang terjadinya peristiwa sukses sebesar p.

Sebuah eksperimen dikatakan mengikuti distribusi geometrik, jika eksperimen itu memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. Ekeperimennya terdiri atas dua peristiwa, seperti sukses dan gagal.
2. Eksperimennya diulang beberapa kali sampai peristiwa sukses terjadi pertama kali.
3. Peluang terjadinya peristiwa sukses dan gagal pada setiap pengulangan eksperimen bersifat tetap.
4. Setiap pengulangan eksperimen bersifat bebas.

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi geometrik bisa dilihat dalam Dalil 8.5.

Dalil 8.5: PARAMETER DISTRIBUSI GEOMETRIK

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi geometrik sebagai berikut:

1. $\mu = \dfrac{1}{p}$

2. $\sigma^2 = \dfrac{1-p}{p^2}$

3. $M_X(t) = \dfrac{p.e^t}{1-(1-p).e^t} \; ; t \in \Re$

DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Misalnya sebuah populasi suatu barang yang berukuran N terdiri atas k buah barang baik dan sisanya (N - k) buah barang rusak. Kemudian diambil sebuah sampel acak berukuran n (n ≤ N) secara sekaligus, ternyata dari sampel acak itu berisi x buah barang baik dan sisanya (n - x) buah barang rusak. Dalam hal ini, kita akan menghitung peluang bahwa dari sampel acak itu akan berisi x buah barang baik.

Banyak susunan yang mungkin untuk mendapatkan x buah barang baik dari k buah barang baik ada $\binom{k}{x}$ cara yang berbeda.

Banyak susunan yang mungkin untuk mendapatkan (n - x) buah barang rusak dari (N - k) buah barang rusak ada $\binom{N-k}{n-x}$ cara yang berbeda.

Banyak susunan yang mungkin untuk mendapatkan n buah barang dari N buah barang ada $\binom{N}{n}$ cara yang berbeda.

Maka peluang bahwa sampel acak itu akan berisi x buah barang baik adalah:

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Berdasarkan uraian di atas, kita dapat mendefinisikan distribusi hipergeometrik.

Definisi 8.6: FUNGSI PELUANG HIPERGEOMETRIK

Peubah acak X dikatakan berdistribusi hipergeometrik, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}\ ;\ x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$$

Peubah acak X yang berdistribusi hipergeometrik disebut juga ***peubah acak hipergeometrik.*** Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi hipergeometrik adalah X ~ H(x;N,n,k), artinya peubah acak X berdistribusi hipergeometrik dengan banyak barang baik dari sampel acak sebanyak x, banyak barang dari populasi sebanyak N, banyak barang dari sampel acak sebanyak n, dan banyak barang baik dari populasi sebanyak k.

Rataan dan varians dari distribusi hipergeometrik bisa dilihat dalam Dalil 8.6.

Dalil 8.6: PARAMETER DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Rataan dan varians dari distribusi hipergeometrik sebagai berikut:

1. $\mu = \frac{nk}{N}$

2. $\sigma^2 = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$