FILE : 15

RINGKASAN PERTEMUAN KE-12
STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH :

NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

B A N D U N G

BEBERAPA DISTRIBUSI KHUSUS DKINTINU DIKENAL

Dalam hal ini akan dibahas beberapa distribusi yang mempunyai bentuk fungsi densitas dan nama tertentu dari peubah acak kontinu, yaitu: distribusi seragam, distribusi gamma, distribusi eksponensial, distribusi khi-kuadrat, distribusi beta, distribusi normal umum, distribusi normal baku, dan distribusi normal dua peubah acak.

Pada uraian sebelumnya, kita sudah membahas fungsi densitas yang diperoleh berdasarkan sifatnya. Fungsi densitas seperti itu bentuknya beraneka macam, sehingga bentuk tersebut tidak mempunyai nama. Selain itu, fungsi densitas bisa mempunyai bentuk yang tertentu dan nama tertentu pula. Distribusi yang mempunyai bentuk fungsi densitas dan nama tertentu itu dinamakan ***distribusi khusus kontinu.***

DISTRIBUSI SERAGAM

Peubah acak yang berdistribusi seragam ini mempunyai fungsi densitas berupa konstanta yang didefinisikan atas sebuah interval nilai peubah acaknya. Jadi fungsi densitas seragam ini mempunyai nilai yang sama sepanjang interval nilai yang diberikan.

Definisi 9.1: FUNGSI DENSITAS SERAGAM

Peubah acak X dikatakan berdistribusi seragam, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}\ ;\ \alpha < x < \beta$$

$$= \quad 0 \quad ;\ x \text{ lainnya.}$$

Peubah acak X yang berdistribusi seragam dikatakan juga ***peubah acak seragam.***

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi seragam adalah S(x;α,β), peubah acak X berdistribusi gamma dengan parameter α dan β.

Peubah acak X yang berdistribusi seragam dengan parameternya α dan β bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim S(\alpha,\beta)$$

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi seragam bisa dilihat dalam Dalil 9.1.

Dalil 9.1: PARAMETER DISTRIBUSI SERAGAM

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi seragam sebagai berikut:

1. $\mu = ½(\alpha + \beta)$
2. $\sigma^2 = (1/12)(\beta - \alpha)^2$
3. $M_X(t) = \dfrac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t(\beta - \alpha)}$; $t \neq 0$

   $= 1$; $t = 0$

DISTRIBUSI GAMMA

Distribusi gamma ini mempunyai fungsi densitas berbentuk:

$$f(x) = k.x^{\alpha - 1}.e^{-x/\beta} \; ; x > 0 , \alpha > 0 , \beta > 0$$
$$= 0 \quad ; x \text{ lainnya.}$$

Kita akan menentukan nilai konstanta k sedemikian hingga fungsi di atas memenuhi sebuah fungsi densitas.

- Sifat (i) dari fungsi densitas: $f(x) \geq 0$

$k.x^{\alpha - 1}.e^{-x/\beta} \geq 0$

Karena $x > 0$, $\alpha > 0$, dan $\beta > 0$, maka $k > 0$.

- Sifat (ii) dari fungsi densitas: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{\infty} k.x^{\alpha-1}.e^{-x/\beta}\, dx = 1$$

$$0 + k.\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}.e^{-x/\beta}\, dx = 1$$

Untuk menyelesaikan integral di atas dilakukan dengan menggunakan bantuan ***fungsi gamma***, yaitu:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1}.e^{-y}\ dy \text{, untuk } \alpha > 0$$

Misalnya: y = x/β, maka x = βy

dx = β dy

Batas-batas: Untuk x = 0, maka y = 0

Untuk x = ∞, maka y = ∞

$$k.\int_0^\infty (\beta y)^{\alpha-1}.e^{-y}.\beta\ dy = 1$$

$$k.\beta^\alpha.\int_0^\infty y^{\alpha-1}.e^{-y}\ dy = 1$$

k . β^α . Γ (α) = 1

$$k = \frac{1}{\beta^\alpha.\Gamma(\alpha)}$$

Dari uraian di atas, kita dapat mendefinisikan distribusi gamma.

Definisi 9.2: FUNGSI DENSITAS GAMMA

Peubah acak X dikatakan berdistribusi gamma, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha.\Gamma(\alpha)}\ x^{\alpha-1}.e^{-x/\beta}\ ;\ x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

$$= \quad \mathbf{0} \quad ;\ x \text{ lainnya.}$$

Peubah acak X yang berdistribusi gamma disebut juga ***peubah acak gamma.***

Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi gamma adalah G(x;α,β), artinya peubah acak X berdistribusi gamma dengan parameter α dan β.

Peubah acak X yang berdistribusi gamma dengan parameternya α dan β bisa juga ditulis sebagai:

X ~ G(α,β)

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi gamma bisa dilihat dalam Dalil 9.2.

Dalil 9.2: PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi gamma sebagai berikut:

1. $\mu = \alpha\beta$
2. $\sigma^2 = \alpha\beta^2$
3. $M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$; $t < 1/\beta$

DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

Distribusi eksponensial ini diperoleh dari distribusi gamma dengan $\alpha = 1$ dan $\beta = \theta$. Sehingga kita bisa mendefinisikan distribusi eksponensial.

Definisi 9.3: FUNGSI DENSITAS EKSPONENSIAL

Peubah acak X dikatakanberdistribusi eksponensial, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = (1/\theta).e^{-x/\theta} \; ; \; x > 0 \, , \; \theta > 0$$
$$= \quad 0 \quad ; \; x \text{ lainnya.}$$

Peubah acak X yang berdistribusi eksponensial disebut juga ***peubah acak eksponensial.*** Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi eksponensial adalah Exp(x;θ), artinya peubah acak X berdistribusi eksponensial dengan parameter θ.

Peubah acak X yang berdistribusi eksponensial dengan parameter θ bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim \text{Exp}(\theta)$$

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi eksponensial bisa dilihat dalam Dalil 9.3.

Dalil 9.3: PARAMETER DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi eksponensial sebagai berikut:

1. $\mu = \theta$
2. $\sigma^2 = \theta$
3. $M_X(t) = (1 - \theta t)^{-1}$; $t < 1/\theta$

DISTRIBUSI KHI-KUADRAT

Distribusi khi-kuadrat diperoleh dari distribusi gamma dengan $\alpha = \nu/2$ dan $\beta = 2$. Sehingga kita bisa mendefinisikan distribusi khi-kuadrat.

Definisi 9.4: FUNGSI DENSITAS KHI-KUADRAT

Peubah acak X dikatakan berdistribusi khi-kuadrat, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}.\Gamma(\nu/2)} x^{(\nu-2)/2}.e^{-x/2} \quad ; x > 0$$

$$= \quad 0 \quad ; x \text{ lainnya.}$$

Peubah acak X yang berdistribusi khi-kuadrat disebut juga ***peubah acak khi-kuadrat.***

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi khi-kuadrat adalah $\chi^2(\nu)$, artinya peubah acak X berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan ν.

Peubah acak X yang berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan ν bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim \chi^2(\nu)$$

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi khi-kuadrat bisa dilihat dalam Dalil 9.4.

Dalil 9.4: PARAMETER DISTRIBUSI KHI-KUADRAT

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi khi-kuadrat sebagai berikut:

1. $\mu = \nu$
2. $\sigma^2 = 2\nu$
3. $M_X(t) = (1 - 2t)^{-\nu/2}$; $t < ½$

DISTRIBUSI BETA

Misalnya fungsi densitas dari peubah acak Y yang berdistribusi seragam berbentuk:

$$h(y) = 1 \ ; \ 0 < y < 1$$
$$= 0 \ ; \ y \text{ lainnya.}$$

Apabila kita memperhatikan fungsi densitas di atas, maka sebenarnya fungsi densitas tersebut merupakan hal khusus dari distribusi lain, yang disebut distribusi beta.

Definisi 9.5: FUNGSI DENSITAS BETA

Peubah acak X dikatakan berdistribusi beta, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1} \ ; \ 0 < x < 1 \ , \ \alpha > 0 \ , \ \beta > 0$$
$$= \quad 0 \quad ; \ x \text{ lainnya.}$$

Peubah acak X yang berdistribusi beta disebut juga ***peubah acak beta.***

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi beta adalah B(x;α,β), artinya peubah acak X berdistribusi beta dengan parameter α dan β.

Peubah acak X yang berdistribusi beta dengan parameter α dan β bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim B(\alpha,\beta)$$

Rataan dan varians dari distribusi beta bisa dilihat dalam Dalil 9.5.

Dalil 9.5: PARAMETER DISTRIBUSI BETA

Rataan dan varians dari distribusi betas sebagai berikut:

1. $\mu = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

2. $\sigma^2 = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$