FILE : 16

RINGKASAN PERTEMUAN KE-13

STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH :

NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

B A N D U N G

DISTRIBUSI NORMAL UMUM

Distribusi normal umum ini merupakan distribusi dari peubah acak kontinu yang paling banyak sekali dipakai sebagai pendekatan yang baik dari distribusi lainnya dengan persyaratan tertentu. Sifat-sifat distribusi normal umum secara matematika dipelajari pertama kali oleh tiga orang ahli, yaitu:

1. ***Abraham de Moivre (1667 - 1745)***
2. ***Pierre Laplace (1749 - 1827)***
3. ***Karl Gauss (1777 - 1855)***

Abraham de Moivre, seorang matematikawan dari Inggris yang menenmukan distribusi normal pada tahun 1733 sebagai hasil dari pendekatan distribusi binomial dan penggunaannya terhadap masalah dalam permainan yang bersifat untung-untungan. Kemudian Laplace tahun 1774 mengenal distribusi normal sebagai hasil dari beberapa kekeliruan dalam Astronomi. Gauss tahun 1809 menggunakan kurva normal untuk menggambarkan teori kekeliruan pengukuran meliputi penghitungan orbit bintang di langit. Sepanjang abad ke-18 dan ke-19, beberapa upaya dibuat untuk menetapkan model normal sebagai dasar hukum untuk semua peubah acak kontinu.

Berikut ini kita akan mendefinisikan distribusi normal umum.

Definisi 9.6: FUNGSI DENSITAS NORMAL UMUM

Peubah acak X dikatakan berdistribusi normal umum, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]; \ -\infty < x < \infty, \ -\infty < \mu < \infty, \ \sigma^2 > 0$$

Peubah acak X yang berdistribusi normal umum disebut juga ***peubah acak normal umum.*** Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi normal umum adalah $N(x;\mu,\sigma^2)$, artinya peubah acak X berdistribusi normal umum dengan rataan μ dan varians σ^2.

Peubah acak X yang berdistribusi normal dengan rataan μ dan varians σ^2 bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

Beberapa sifat dari kurva fungsi densitas distribusi normal umum sebagai berikut:

i. Kurvanya berbentuk lonceng dan simetrik di $x = \mu$.

ii. Rataan, median, dan modus dari distribusi berimpitan.

iii. Fungsi densitas mencapai nilai maksimum di x = μ sebesar $\frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}}$.

iv. Kurvanya berasimtut sumbu datar x.

v. Kurvanya mempunyai titik infleksi (x,f(x)), dengan:

$$x = \mu \pm \sigma$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}} e^{-1/2}$$

vi. Luas daerah di bawah kurva sebagai berikut:

- $P(|X - \mu| < \sigma) = 0{,}6826$
- $P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0{,}9544$
- $P(|X - \mu| < 3\sigma) = 0{,}9973$

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi normal umum bisa dilihat dalam Dalil 9.6.

Dalil 9.6: PARAMETER DISTRIBUSI NORMAL UMUM

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi normal umum sebagai berikut:

1. ***E(X) = μ***
2. ***Var(X) = σ^2***
3. ***$M_X(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2)$; $t \in \Re$***

DISTRIBUSI NORMAL BAKU

Penghitungan luas daerah di bawah kurva distribusi normal umum agar lebih mudah biasanya digunakan bantuan Tabel Distribusi Normal Baku.

Berikut ini kita akan mendefinisikan distribusi normal baku.

Definisi 9.7: FUNGSI DENSITAS NORMAL BAKU

Distribusi normal umum dengan rataan $\mu = 0$ dan varians $\sigma^2 = 1$ dinamakan distribusi normal baku dan fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2} x^2\right); -\infty < x < \infty$$

Peubah acak X yang berdistribusi normal baku disebut juga ***peubah acak normal baku.***

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi normal baku adalah N(x;0,1), artinya peubah acak X berdistribusi normal umum dengan rataan 0 dan varians 1.

Peubah acak X yang berdistribusi normal umum dengan rataan 0 dan varians 1 atau peubah acak X yang berdistribusi normal baku bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim N(0;1)$$

Rataan dan varians dari distribusi normal baku dengan mudah dapat ditentukan, yaitu:

1. $\mu = E(X) = 0$
2. $\sigma^2 = Var(X) = 1$

Adapun fungsi pembangkit momennya ditentukan berdasarkan fungsi pembangkit momen dari distribusi normal umum dengan mensubstitusikan $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$ kedalamnya, sehingga akan diperoleh:

3. $M_X(t) = \exp(\frac{1}{2} t^2)$; $t \in \Re$

Penghitungan peluang dari peubah acak yang berdistribusi normal baku dapat dilakukan sebagai berikut:

1. Gambarkan kurva distribusi normal baku.
2. Nilai z yang dicari diletakan pada kurva, bisa di sebelah kiri maupun kanan nol.
3. Daerah yang dicari ditandai pada kurvanya sesuai dengan nilai z nya.
4. Hitung peluang yang dicari dengan cara menghitung luas daerah yang ditandai berdasarkan Tabel Distribusi Normal Baku.

Berikut ini akan diberikan hubungan antara distribusi normal umum dan distribusi khi-kuadrat yang akan dijelaskan dalam Dalil 9.8.

Dalil 9.8: PENDEKATAN DISTRIBUSI NORMAL UMUM KE KHI-KUADRAT

Jika peubah acak X berdistribusi normal umum dengan rataan μ dan varians σ^2, maka peubah acak:

$$V = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2$$

berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan 1, ditulis $\chi^2(1)$.

DISTRIBUSI NORMAL DUA PEUBAH ACAK

Berikut ini akan dijelaskan distribusi normal dua peubah acak sebagai perluasan dari distribusi normal umum untuk satu peubah acak.

Definisi 9.8: FUNGSI DENSITAS GABUNGAN NORMAL DUA PEUBAH ACAK

Dua peubah acak X dan Y dikatakan berdistribusi normal dua peubah acak, jika dan hanya jika fungsi densitas gabungannya berbentuk:

$$f\,(x,y) = \frac{1}{2\pi.\sigma_1.\sigma_2.\sqrt{1-\rho^2}}\ \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\ Q\right)$$

dengan:

$$Q = \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$$

untuk $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $-1 \le \rho \le 1$, $-\infty < \mu_1 < \infty$, ***dan*** $-\infty < \mu_2 < \infty$

Berikut ini akan dibahas penentuan fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y yang berdistribusi normal dua peubah acak.

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen gabungan, maka:

$M(t_1,t_2) = E[\exp(t_1X + t_2Y)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t_1x + t_2y\right) \bullet f\,(x,y)\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t_1x + t_2y\right) \bullet \frac{1}{2\pi.\sigma_1.\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\ \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right] dx\ dy$$

$$= \frac{\exp(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2)}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-1}{2}w^2 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2\right)\right] \bullet \sqrt{1-\rho^2}\ dw\ dz$$

$$= \exp\left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2\right)\right] \bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-1}{2}z^2\right) \bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-1}{2}w^2\right) dw\ dz$$

Maka: $M(t_1,t_2) = \exp\left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2\right)\right]$; $t_1,t_2 \in \Re$

Dari hasil fungsi pembangkit momen gabungan di atas, kita bisa menentukan rataan dan varians untuk masing-masing peubah acak serta kovariansnya. Hal ini bisa dilihat dalam dalil berikut ini.

Dalil 9.9: PARAMETER DISTRIBUSI NORMAL DUA PEUBAH ACAK

Jika X dan Y adalah dua peubah acak yang mengikuti distribusi normal dua peubah acak, maka X dan Y masing-masing mengikuti distribusi normal umum dengan:

a. $E(X) = \mu_1$

b. $Var(X) = \sigma_1^2$

c. $E(Y) = \mu_2$

d. $Var(Y) = \sigma_2^2$

dan nilai kovariansnya adalah:

e. $Kov(X,Y) = \rho\,\sigma_1\,\sigma_2$