FILE : 17

RINGKASAN PERTEMUAN KE-14

STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH :

NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

B A N D U N G

BEBERAPA TEKNIK DISTRIBUSI FUNGSI PEUBAH ACAK

Dalam hal ini akan dibahas beberapa teknik yang digunakan dalam menentukan distribusi dari fungsi peubah acak, yaitu teknik fungsi distribusi, teknik transformasi peubah acak, dan teknik fungsi pembangkit momen. Misalkan kita mempunyai peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Kita bisa menentukan fungsi peluang atau fungsi densitas berdasarkan sifatnya. Kemudian kita mempunyai peubah acak baru yang merupakan fungsi dari peubah acak semula. Dalam hal ini, kita akan menentukan distribusi dari peubah acak baru tersebut. Tentu saja, penentuan distribusi tersebut bergantung pada banyak peubah acak yang dilibatkannya, yaitu satu peubah acak atau dua peubah acak.

TEKNIK FUNGSI DISTRIBUSI

A. PEUBAH ACAK DISKRIT

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan fungsi peluangnya p(x), maka Y = H(X) adalah juga peubah acak diskrit. Penentuan fungsi peluang dari Y dapat dilakukan sebagai berikut:

1. Tentukan nilai-nilai yang mungkin dari Y.
2. Tentukan $F(y) = P(Y \leq y)$
3. Tentukan fungsi peluang dari Y berdasarkan F(y).

B. PEUBAH ACAK KONTINU

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi densitasnya f(x), maka Y = H(X) adalah juga peubah acak kontinu. Fungsi densitas dari Y ditentukan sebagai berikut:

1. Tentukan $F(y) = P(Y \leq y)$
2. Tentukan turunan pertama F(y) terhadap y, untuk memperoleh f(y).
3. Tentukan daerah hasil untuk Y.

TEKNIK TRANSFORMASI PEUBAH ACAK

A. PEUBAH ACAK DISKRIT

Sekarang kita akan menentukan fungsi peluang tanpa melalui fungsi distribusi melainkan dengan teknik transformasi peubah acak, dengan penentuannya dapat dilihat dalam dalil berikut ini.

Dalil 10.1: TEKNIK TRANSFORMASI PEUBAH ACAK DISKRIT

Misalkan X adalah peubah acak diskrit dengan fungsi peluangnya p(x). Jika peubah acak Y = H(X) dengan setiap nilai dari X berkorespondensi satu dan hanya satu dengan nilai dari Y dan sebaliknya sedemikian hingga X = K(Y), maka fungsi peluang dari Y ditentukan sebagai berikut:

$$p(y) = p[K(y)]$$

B. PEUBAH ACAK KONTINU

Sekarang kita akan menentukan fungsi densitas dari fungsi peubah acak kontinu tanpa melalui fungsi distribusi melainkan dengan teknik transformasi peubah acak. Dalam hal ini, penentuan fungsi densitas ini dibagi dua bagian, yaitu:

1. Penentuan fungsi densitas dengan teknik transformasi peubah acak yang melibatkan satu peubah acak kontinu, sehingga diperoleh ***teknik transformasi satu peubah acak kontinu***.
2. Penentuan fungsi densitas dengan teknik transformasi peubah acak yang melibatkan dua peubah acak kontinu, sehingga diperoleh ***teknik transformasi dua peubah acak kontinu***.

Berikut ini akan dibahas kedua macam teknik transformasi peubah acak tersebut.

Dalil 10.2: TEKNIK TRANSFORMASI SATU PEUBAH ACAK KONTINU

Misalkan X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi densitas f(x). Jika fungsi y = u(x) dapat diturunkan dan naik atau turun untuk semua nilai dalam daerah hasil X dengan f(x) ≠ 0, maka persamaan y = u(x) dapat diselesaikan untuk x dengan x = w(y).

Fungsi densitas dari Y = U(X) ditentukan oleh:

$$g(y) = f[w(y)].\ |w'(y)|$$

Kita juga dapat menentukan fungsi densitas dari sebuah peubah acak (merupakan peubah acak transformasi) yang merupakan fungsi dari peubah acak lainnya, dengan kedua peubah acak itu diketahui fungsi densitas gabungannya atau kedua peubah acak itu tidak diketahui fungsi densitas gabungannya tetapi kedua peubah acak saling bebas dan setiap peubah acak diketahui fungsi densitasnya. Hal ini bisa dilakukan, jika peubah acak transformasinya ada dua buah yang masing-masing merupakan fungsi dari dua peubah acak lainnya.

Penentuan fungsi densitas tersebut bisa dilihat dalam dalil berikut ini.

Dalil 10.3: TEKNIK TRANSFORMASI DUA PEUBAH ACAK KONTINU

Misalkan X dan Y adalah peubah acak kontinu dengan fungsi densitas gabungannya f(x,y). Jika fungsi u = g_1(x,y) dan v = g_2(x,y) diferensiabel secara parsial terhadap x dan , dan merupakan transformasi satu-satu untuk semua nilai dalam daerah hasil dari X dan Y dengan f(x,y) ≠ 0, maka untuk nilai x dan y tersebut persamaan u = g_1(x,y) dan v = g_2(x,y) dapat diperoleh x dan y yang tunggal, dengan x = w(u,v) dan y = k(u,v).

Fungsi densitas gabungan dari fungsi U = g_1(X,Y) dan V = g_2(X,Y) ditentukan oleh:

$$h(u,v) = f[w(u,v),k(u,v)].\ |J|$$

Dengan: $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Dalam prakteknya, penentuan fungsi densitas dari peubah acak transformasi bisa terjadi dalam empat kemungkinan, yaitu:

A. DUA TRANSFORMASI PEUBAH ACAK DAN FUNGSI DENSITAS GABUNGAN DIKETAHUI

Misalkan kita mempunyai fungsi densitas gabungan dari dua peubah acak kontinu dan dua peubah acak transformasi yang masing-masing merupakan fungsi dari dua peubah acak kontinu tersebut. Kedua peubah acak transformasi itu merupakan peubah acak yang baru.

Langkah-langkah untuk menentukan fungsi densitas marginaldari salah satu peubah acak transformasi itu sebagai berikut:

1. Ubah bentuk dua peubah acak transformasi dari huruf besar (dalam bentuk peubah acak) menjadi huruf kecil (dalam bentuk nilai peubah acak), sehingga diperoleh nilai peubah acak transformasi.
2. Tentukan invers dari nilai peubah acak transformasi itu, sehingga akan diperoleh dua nilai peubah acak lama yang merupakan fungsi dari nilai peubah acak transformasi.
3. Hitung nilai Jacobian (ditulis dengan J) dari dua nilai peubah acak lama, dengan jacobiannya berupa determinan dari matriks berordo 2 x 2. Kemudian hitung harga mutlak dari jacobian itu.

4. Tentukan distribusi gabungan dari kedua peubah acak transformasi.
5. Tentukan batas-batas nilai dari kedua peubah acak transformasi.
6. Tentukan fungsi densitas marginal dari salah satu peubah acak transformasi yang diinginkan.

B. DUA TRANSFORMASI PEUBAH ACAK DIKETAHUI DAN FUNGSI DENSITAS GABUNGAN TIDAK DIKETAHUI

Misalkan kita mempunyai fungsi densitas dari masing-masing peubah acak kontinu dan kedua peubah acaknya saling bebas. Kemudian diketahui dua buah peubah acak transformasi yang masing-masing merupakan fungsi dari dua peubah acak kontinu semula.

Langkah-langkah untuk menentukan fungsi densitas marginal dari salah satu peubah acak transformasi itu sebagai berikut:

1. Tentukan fungsi densitas gabungan dari kedua peubah acak kontinu semula.
2. Ubah bentuk dua peubah acak transformasi dari huruf besar (dalam bentuk peubah acak) menjadi huruf kecil (dalam bentuk nilai peubah acak), sehingga diperoleh nilai peubah acak transformasi.
3. Tentukan invers dari nilai peubah acak transformasi itu, sehingga akan diperoleh dua nilai peubah acak lama yang merupakan fungsi dari nilai peubah acak transformasi.
4. Hitung nilai Jacobian (ditulis dengan J) dari dua nilai peubah acak lama, dengan jacobiannya berupa determinan dari matriks berordo 2 x 2. Kemudian hitung harga mutlak dari jacobian itu.
5. Tentukan distribusi gabungan dari kedua peubah acak transformasi.
6. Tentukan batas-batas nilai dari kedua peubah acak transformasi.
7. Tentukan fungsi densitas marginal dari salah satu peubah acak transformasi yang diinginkan.

C. SATU TRANSFORMASI PEUBAH ACAK DAN FUNGSI DENSITAS GABUNGAN DIKETAHUI

Misalkan kita mempunyai fungsi densitas gabungan dari dua peubah acak kontinu dan sebuah transformasi peubah acak yang merupakan fungsi dari kedua peubah acak kontinu tersebut.

Langkah-langkah untuk menentukan fungsi densitas dari transformasi peubah acak itu sebagai berikut:

1. Kita mengambil atau memisalkan satu transformasi peubah acak lagi dengan bentuknya disesuaikan dengan bentuk transformasi yang diketahui.

   Jika transformasi yang diketahui berbentuk penjumlahan, pengurangan, atau perkalian, maka kita bebas mengambil transformasi yang kedua.

   Jika transformasi yang diketahui berbentuk pembagian, maka kita sebaiknya mengambil transformasi yang keduanya adalah penyebutnya.
2. Ubah bentuk dua peubah acak transformasi dari huruf besar (dalam bentuk peubah acak) menjadi huruf kecil (dalam bentuk nilai peubah acak), sehingga diperoleh nilai peubah acak transformasi.
3. Tentukan invers dari nilai peubah acak transformasi itu, sehingga akan diperoleh dua nilai peubah acak lama yang merupakan fungsi dari nilai peubah acak transformasi.
4. Hitung nilai Jacobian (ditulis dengan J) dari dua nilai peubah acak lama, dengan jacobiannya berupa determinan dari matriks berordo 2 x 2. Kemudian hitung harga mutlak dari jacobian itu.
5. Tentukan distribusi gabungan dari kedua peubah acak transformasi.
6. Tentukan batas-batas nilai dari kedua peubah acak transformasi.
7. Tentukan fungsi densitas marginal dari peubah acak transformasi yang diketahui.

Penjelasan dari uraian di atas bisa dilihat dalam dalil berikut ini.

Dalil 10.4: TRANSFORMASI BERBENTUK PENJUMLAHAN

Misalkan X dan Y adalah peubah acak kontinu dengan fungsi densitas gabungannya f(x,y). Jika S = X + Y, maka fungsi densitas dari S dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{k_1(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(w, s-w)\, dw$$

atau:

$$\boldsymbol{k_1(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(s-w, w)\, dw$$

Dalil 10.5: TRANSFORMASI BERBENTUK PENGURANGAN

Misalkan X dan Y adalah peubah acak kontinu dengan fungsi densitas gabungannya f(x,y). Jika S = X - Y, maka fungsi densitas dari S dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{k_1(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(w, w - s)\, dw$$

atau:

$$\boldsymbol{k_1(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(s + w, w)\, dw$$

Dalil 10.6: TRANSFORMASI BERBENTUK PERKALIAN

Misalkan X dan Y adalah peubah acak kontinu dengan fungsi densitas gabungannya f(x,y). Jika W = XY, maka fungsi densitas dari W dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{h_1(w)} = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u, \frac{w}{u}\right) . \left| \frac{1}{u} \right| du$$

atau:

$$\boldsymbol{h_1(w)} = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{w}{u}, u\right) . \left| \frac{1}{u} \right| du$$

Dalil 10.7: TRANSFORMASI BERBENTUK PEMBAGIAN

Misalkan X dan Y adalah peubah acak kontinu dengan fungsi densitas gabungannya f(x,y). Jika Z = X/Y, maka fungsi densitas dari Z dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{h_1(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(v, zv)\, v \, dv$$

D. SATU TRANSFORMASI PEUBAH ACAK DIKETAHUI DAN FUNGSI DENSITAS GABUNGAN TIDAK DIKETAHUI

Misalkan kita mempunyai dua peubah acak kontinu yang saling bebas dan masing-masing mempunyai fungsi densitasnya. Kemudian kita juga mempunyai sebuah transformasi peubah acak yang merupakan fungsi dari kedua peubah acak itu.

Langkah-langkah untuk menentukan fungsi densitas dari transformasi prubah acak itu sebagai berikut:

1. Kita menentukan fungsi densitas gabungan dari kedua peubah acak tersebut.
2. Kita mengambil atau memisalkan satu transformasi peubah acak lagi dengan bentuknya disesuaikan dengan bentuk transformasi peubah acak yang diketahui.

   Jika transformasi peubah acak yang diketahui berbentuk penjumlahan, pengurangan, atau perkalian, maka kita bebas mengambil transformasi peubah acak yang kedua.

   Jika transformasi peubah acak yang diketahui berbentuk pembagian, maka kita sebaiknya mengambil transformasi peubah acak yang keduanya adalah penyebutnya.
3. Ubah bentuk dua peubah acak transformasi dari huruf besar (dalam bentuk peubah acak) menjadi huruf kecil (dalam bentuk nilai peubah acak), sehingga diperoleh nilai peubah acak transformasi.
4. Tentukan invers dari nilai peubah acak transformasi itu, sehingga akan diperoleh dua nilai peubah acak lama yang merupakan fungsi dari nilai peubah acak transformasi.
5. Hitung nilai Jacobian (ditulis dengan J) dari dua nilai peubah acak lama, dengan jacobiannya berupa determinan dari matriks berordo 2 x 2. Kemudian hitung harga mutlak dari jacobian itu.
6. Tentukan distribusi gabungan dari kedua peubah acak transformasi.
7. Tentukan batas-batas nilai dari kedua peubah acak transformasi.
8. Tentukan fungsi densitas marginal dari salah satu peubah acak transformasi yang diinginkan.

Penjelasan dari uraian di atas bisa dilihat dalam dalil-dalil berikut ini.

<u>Dalil 10.8</u>: TRANSFORMASI BERBENTUK PENJUMLAHAN

Misalkan X dan Y adalah peubah acak kontinu yang saling bebas dengan masing-masing fungsi densitasnya berbentuk g(x) dan h(y). Jika S = X + Y, maka fungsi densitas dari S dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{k_1(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(w, w-s)\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} g(w).h(s-w)\, dw$$

atau: $\qquad k_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s-w, w)\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} g(s-w).h(w)\, dw$

Dalil 10.9: TRANSFORMASI BERBENTUK PENGURANGAN

Misalkan X dan Y adalah peubah acak kontinu yang saling bebas dengan masing-masing fungsi densitasnya berbentuk g(x) dan h(y). Jika S = X - Y, maka fungsi densitas dari S dirumuskan sebagai berikut:

$$k_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w, w-s)\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} g(w).h(w-s)\, dw$$

atau: $\qquad k_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s+w, w)\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} g(s+w).h(w)\, dw$

Dalil 10.10: TRANSFORMASI BERBENTUK PERKALIAN

Misalkan X dan Y adalah peubah acak kontinu yang saling bebas dengan masing-masing fungsi densitasnya berbentuk g(x) dan h(y). Jika S = XY, maka fungsi densitas dari S dirumuskan sebagai berikut:

$$k_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(w, \frac{s}{w}\right) . \left|\frac{1}{w}\right| dw = \int_{-\infty}^{\infty} g(w).h\left(\frac{s}{w}\right) . \left|\frac{1}{w}\right| dw$$

atau: $\qquad k_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{s}{w}, w\right) . \left|\frac{1}{w}\right| dw = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{s}{w}\right).h(w) . \left|\frac{1}{w}\right| dw$

Dalil 10.11: TRANSFORMASI BERBENTUK PEMBAGIAN

Misalkan X dan Y adalah peubah acak kontinu yang saling bebas dengan masing-masing fungsi densitasnya berbentuk g(x) dan h(y). Jika Z = X/Y, maka fungsi densitas dari Z dirumuskan sebagai berikut:

$$k_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(vz, v) . |v|\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} g(vz).h(v) |v|\, dv$$