FILE : 7

RINGKASAN PERTEMUAN KETIGA
STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH :

NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

B A N D U N G

3.5. PELUANG BERSYARAT

Jika kita menghitung peluang sebuah peristiwa, maka penghitungannya selalu didasarkan pada ruang sampel eksperimen. Apabila A adalah sebuah peristiwa, maka penghitungan peluang dari peristiwa A selalu didasarkan pada ruang sampel S. Akibatnya, peluang dari peristiwa A ditulis selengkapnya dengan P(A | S), artinya peluang dari peristiwa A diberikan S.

Penulisan P(A | S) dinamakan *peluang bersyarat*.

Coba kita perhatikan uraian berikut ini.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A \mid S) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(A \cap S)}{n(S)}$$

$$= \frac{\frac{n(A \cap S)}{n(S)}}{\frac{n(S)}{n(S)}}$$

$$P(A \mid S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)}$$

Berdasarkan perumusan di atas, kita dapat mendefinisikan peluang bersyarat sebuah peristiwa diberikan peristiwa lainnya.

Definisi 3.8: PELUANG BERSYARAT

Jika A dan B adalah dua buah peristiwa yang dibentuk dari ruang sample S, maka peluang bersyarat dari B diberikan A didefinisikan sebagai:

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

d*engan P(A) > 0.*

Dalam hal ini, P(B | A) berarti kita ingin menghitung peluang peristiwa B, apabila peristiwa A sudah terjadi. Atau kita juga dapat menyatakan bahwa peluang peristiwa A dan B kedua-duanya terjadi sama dengan peluang peristiwa A terjadi dikalikan dengan peluang peristiwa B terjadi apabila peristiwa sudah terjadi. Dalam hal terakhir ini, kita dapat menuliskannya sbb:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A)}$$

Jika S adalah ruang sampel yang PETI ANGSA dan banyak anggotanya berhingga, dan n(A) menunjukkan banyak anggota peristiwa A, maka:

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$ dan $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$, maka:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}$$

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Jadi:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

<u>Dalil 3.6</u>: PENGHITUNGAN PELUANG BERSYARAT

Jika S adalah ruang sampel yang PETI ANGSA dan banyak anggotanya berhingga dengan peristiwa-peristiwanya A dan B, maka:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{\text{banyak anggota dalam } A \cap B}{\text{banyak anggota dalam } B}}$$

atau:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{\text{banyak cara } A \text{ dan } B \text{ dapat terjadi}}{\text{banyak cara } B \text{ dapat terjadi}}}$$

Berikut ini kita akan menjelaskan dalil perkalian dari peluang bersyarat.

<u>Dalil 3.7</u>: PERKALIAN PELUANG BERSYARAT

Jika A dan B adalah dua buah peristiwa yang dibentuk berdasarkan ruang sampel S. maka:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B).P(A \mid B)}$$

Dalil di atas bias dikembangkan untuk lebih dari dua buah peristiwa.

<u>Untuk 3 buah peristiwa</u>: A_1,A_2,A_3

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)}$$

<u>Untuk 4 buah peristiwa</u>: A_1,A_2,A_3,A_4

$$\boxed{\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = {} & P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\ & .P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}}$$

<u>Untuk m buah peristiwa</u>: A_1,A_2,A_3,A_4,A_m

$$\boxed{\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_m) = {} & P(A_1).P(A_2 \mid A_1) \\ & .P(A_3 \mid A_1 \cap A_2). \dots \\ & .P(A_m \mid A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) \end{aligned}}$$

PELUANG DUA PERISTIWA YANG SALING BEBAS

Dalam pembicaraan sehari-hari, dua buah peristiwa dikatakan bebas, jika terjadinya atau tidak terjadinya peristiwa yang satu tidak dipengaruhi oleh terjadinya peristiwa lainnya. Sebenarnya perumusan dua peristiwa yang saling bebas didasarkan pada perumusan perkalian dari peluang bersyarat, yaitu:

$$P(A \cap B) = P(B).P(A \mid B)$$

Karena dua peristiwa A dan B bebas, maka dalam penghitungan $P(A \mid B)$ terjadinya peristiwa A tidak dipengaruhi oleh terjadinya peristiwa B. Sehingga peristiwa A diberikan peristiwa B akan merupakan peristiwa A itu sendiri. Akibatnya, $P(A \mid B) = P(A)$.

Dengan demikian $P(A \cap B) = P(B).P(A)$.

Perumusan inilah yang akan digunakan dalam mendefinisikan dua peristiwa yang saling bebas.

Definisi 3.9: DUA PERISTIWA BEBAS

Dua peristiwa A dan B dikatakan bebas, jika dan hanya jika:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

Jika dua peristiwa tidak saling bebas, maka dua buah peristiwa itu dikatakan *bergantungan.* Hal ini bias terjadi, jika $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$.

Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam dua buah peristiwa yang saling bebas sbb:

1. Peristiwa yang satu dan komplemen dari peristiwa yang lainnya juga saling bebas.
2. Komplemen dari peristiwa yang satu dan peristiwa yang lainnya juga saling bebas.
3. Komplemen dari peristiwa yang satu dan komplemen dari peristiwa yang lainnya juga saling bebas.

Ketiga hal di atas dapat dilihat dalam Dalil 3.8.

Dalil 3.8: SIFAT-SIFAT DUA PERISTIWA BEBAS

Jika dua peristiwa A dan B saling bebas, maka:

1. *dua buah peristiwa A dan B^C juga saling bebas.*
2. *dua buah peristiwa A^C dan B juga saling bebas.*
3. *dua buah peristiwa A^C dan B^C juga saling bebas.*

Berikut ini kita akan menjelaskan definisi tiga buah peristiwa yang saling bebas, dengan beberapa persyaratan yang harus dipenuhi semuanya. Jika ada salah satu persyaratan yang tidak dipenuhi, maka ketiga buah peristiwa itu dikatakan tidak saling bebas atau bergantungan.

Definisi 3.10: TIGA BUAH PERISTIWA SALING BEBAS

Tiga buah peristiwa A, B, dan C dikatakan saling bebas, jika dan hanya jika dipenuhi persyaratan sbb:

1. *Peristiwa-peristiwa yang berpasangan bebas, yaitu:*

a. $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
b. $P(A \cap C) = P(A).P(C)$
c. $P(B \cap C) = P(B).P(C)$

2. $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$

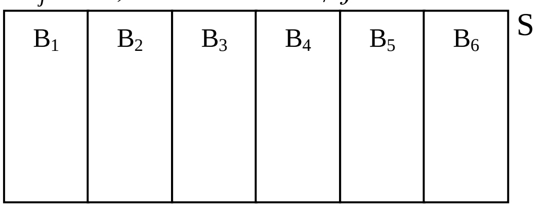
Berdasarkan definisi tiga buah peristiwa yang saling bebas, ternyata ada empat buah persyaratan yang semuanya harus dipenuhi. Kita bisa menentukan banyak persyaratan yang harus dipenuhi dalam penentuan minimal empat buah peristiwa yang saling bebas. Untuk empat buah peristiwa yang saling bebas, persyaratan yang harus dipenuhi sebanyak 11 buah. Untuk lima buah peristiwa yang saling bebas, persyaratan yang harus dipenuhi sebanyak 26 buah. Dan seterusnya.

3.7. DALIL BAYES

Penghitungan peluang bersyarat Bayes didasarkan pada beberapa peristiwa yang merupakan partisi dari ruang sampel.
Berikut ini kita akan membahas dahulu pengertian partisi.
Definisi 3.11: PARTISI

Peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_6$ dikatakan partisi dari ruang sampel S, jika:

a. $B_i \cap B_j = \emptyset$, *untuk semua* $i \neq j$



b. $\bigcup_{i=1}^{6} B_i = S$

c. $P(B_i) > 0$, *untuk semua* $i = 1,2,3,\ldots,6$

Secara umum Definisi 3.11 dapat diperluas untuk k buah peristiwa.
Definisi 3.12: PARTISI SECARA UMUM

Peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$ dikatakan partisi dari ruang sampel S, jika:

a. $B_i \cap B_j = \emptyset$, *untuk semua* $i \neq j$

b. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$

c. $P(B_i) > 0$, *untuk semua* $i = 1,2,3,\ldots,k$

Misalkan dari peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, \ldots, B_6$ yang merupakan partisi dari ruang sampel S, ada sebuah peristiwa yang merupakan gabungan dari semua peristiwa di atas. Penghitungan peluang dari peristiwa itu bisa dilihat dalam Dalil 3.9.
Dalil 3.9: TOTAL PELUANG

Jika peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_6$ merupakan partisi dari ruang sampel S, maka peluang dari peristiwa A yang sembarang dari S adalah:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(B_i).P(A|B_i)}$$

Secara umum dalil di atas dapat diperluas untuk k buah peristiwa.

Dalil 3.10: TOTAL PELUANG SECARA UMUM

Jika peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$ merupakan partisi dari ruang sampel S, maka peluang dari peristiwa A yang yang sembarang dari S adalah:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A|B_i)}$$

Jika kita memperhatikan contoh di atas, kita hanya dapat memperoleh nilai peluang sebuah lampu cabe yang terambil itu tidak jalan. Kita tidak mengetahui dengan pasti apakah lampu cabe yang tidak jalan itu berasal dari kotak 1, kotak 2, atau kotak 3. Apabila kita ingin mengetahui besar peluang bahwa lampu cabe yang tidak jalan itu berasal dari kotak tertentu, maka penyelesaiannya bisa digunakan aturan Bayes.

Dalil 3.11: ATURAN BAYES

Jika peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_6$ merupakan partisi dari ruang sampel S, maka untuk peristiwa A yang sembarang dari S sedemikian hingga P(A) > 0 berlaku:

$$\boxed{P(B_r | A) = \frac{P(B_r).P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{6} P(B_i).P(A|B_i)}}$$

untuk $r = 1,2,3,\ldots,6$.

Secara umum dalil di atas dapat diperluas untuk k buah peristiwa.

Dalil 3.12: ATURAN BAYES SECARA UMUM

Jika peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$ merupakan partisi dari ruang sampel S, maka untuk peristiwa A yang sembarang dari S sedemikian hingga P(A) > 0 berlaku:

$$\boxed{P(B_r | A) = \frac{P(B_r).P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A|B_i)}}$$

untuk $r = 1,2,3,\ldots,k$.