

FILE:8
RINGKASAN PERTEMUAN KEEMPAT
STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH:
NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
BANDUNG

4.3. DISTRIBUSI PELUANG

Dalam sebuah peubah acak diskrit, nilai-nilai yang mungkin dari peubah acaknya merupakan bilangan bulat, baik positif maupun negatif. Kemudian kita dapat menghitung peluang dari masing-masing nilai peubah acak tsb, dengan sebelumnya diasumsikan lebih dahulu nilai peluang untuk masing-masing titik-titik sampel dalam ruang sampel S . Nilai peluang dari peubah acak yang berharga tertentu diperoleh berdasarkan nilai peluang dari titik-titik sampelnya. Apabila nilai peluang dari peubah acak tersebut memenuhi persyaratan tertentu, maka nilai peluang tersebut dinamakan *fungsi peluang*. Berikut ini kita akan menjelaskan definisi fungsi peluang.

Definisi 4.4: FUNGSI PELUANG

Jika X adalah peubah acak diskrit, maka $p(x) = P(X = x)$ untuk setiap x dalam range X dinamakan fungsi peluang dari X .

Nilai fungsi peluang dari X , yaitu $p(x)$, harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

- a. $p(x) \geq 0$
- b. $\sum_x p(x) = 1$

Adapun kumpulan pasangan terurut $(x, p(x))$ dinamakan *distribusi peluang* dari X .

Bentuk umum dari fungsi peluang ada dua kemungkinan, yaitu berupa konstanta dan berupa fungsi dari nilai peubah acak.

1. Fungsi peluang berupa konstanta bisa terdiri atas satu nilai atau lebih dari satu nilai.
2. Fungsi peluang berupa konstanta yang terdiri atas satu nilai, artinya untuk setiap nilai peubah acak yang diberikan, maka nilai fungsi peluangnya sama.
3. Misalnya fungsi peluang dari peubah acak Y berbentuk:
$$p(y) = \frac{1}{4}; y = -1, 0, 1, 2$$
4. Fungsi peluang berupa konstanta yang terdiri atas lebih dari satu nilai, artinya untuk setiap nilai peubah acak yang diberikan masing-masing mempunyai nilai fungsi peluangnya.

Misalnya fungsi peluang dari peubah acak X berbentuk:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{3}; x = 2 \\ &= \frac{1}{3}; x = 3 \\ &= \frac{1}{4}; x = 4 \\ &= \frac{1}{12}; x = 5 \end{aligned}$$

5. Fungsi peluang berupa fungsi dari nilai peubah acak (FPBF) sebenarnya sama dengan fungsi peluang berupa konstanta yang terdiri atas lebih dari satu nilai (FPBK), hanya bedanya FPBF ditulis secara umum dan berlaku untuk nilai peubah acak tertentu sedangkan FPBK ditulis satu per satu yang berlaku untuk masing-masing nilai peubah acaknya.

Misalnya fungsi peluang dari peubah acak X berbentuk:

$$p(x) = \frac{x}{15}; x = 1, 2, 3, 4, 5$$

Apabila kita akan menggambarkan grafik dari fungsi peluang atau distribusi peluang, maka grafiknya dapat berupa *diagram batang* atau *histogram peluang*.

Dalam peubah acak kontinu, fungsi yang memenuhi sifat-sifat tertentu dinamakan *fungsi densitas peluang* atau *fungsi densitas* saja.

Untuk lebih jelasnya, berikut ini kita akan menjelaskan definisi fungsi densitas.

Definisi 4.5: FUNGSI DENSITAS

Misalnya X adalah peubah acak kontinu yang didefinisikan dalam himpunan bilangan real. Sebuah fungsi disebut fungsi densitas dari X , jika nilai-nilainya (yaitu $f(x)$) memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

i. $f(x) \geq 0$; untuk $x \in (-\infty, \infty)$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

iii. Untuk setiap a dan b , dengan $-\infty < a < b < \infty$, maka:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Dalam peubah acak diskrit, peluang dari peubah acak yang berharga lebih dari satu nilai yang membentuk sebuah interval bisa dihitung dengan mudah bergantung pada bentuk intervalnya. Artinya jika kita akan menghitung $P(0 < X < 3)$, maka hasilnya akan berbeda dengan $P(0 \leq X < 3)$, $P(0 < X \leq 3)$, atau $P(0 \leq X \leq 3)$. Akan tetapi, penghitungan peluang dari peubah acak kontinu yang harganya membentuk sebuah interval apa saja, hasilnya akan sama. Hal ini bisa dilihat dalam Dalil 4.1.

Dalil 4.1: PELUANG PEUBAH ACAK KONTINU

Jika X adalah peubah acak kontinu serta a dan b adalah dua konstanta real dengan $a < b$, maka:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

Fungsi densitas dari sebuah peubah acak kontinu bisa mempunyai beberapa nilai bergantung pada nilai peubah acaknya. Jika setiap nilai fungsi densitas itu merupakan fungsi dari konstanta yang belum diketahui, maka penghitungan konstanta itu tidak dilakukan terhadap masing-masing interval nilai peubah acaknya melainkan terhadap semua interval nilai peubah acaknya.

4.4. FUNGSI DISTRIBUSI

Apabila kita mempunyai distribusi peluang dari sebuah peubah acak diskrit, maka kita bisa menghitung peluang dari peubah acak tersebut yang berharga tertentu. Nilai peluang dari peubah acak tersebut bisa mempunyai beberapa kemungkinan, yaitu $P(X < a)$, $P(a < X < b)$, $P(a \leq X \leq b)$, $P(X > b)$, $P(X \geq b)$, $P(X \leq a)$, $P(a \leq X < b)$, atau $P(a < X \leq b)$, dengan a dan b adalah dua buah konstanta ($a < b$).

Jika kita memperhatikan bentuk $P(X \leq a)$, maka bentuk umumnya ditulis $P(X \leq x)$. Dalam statistika matematis, bentuk $P(X \leq x)$ dinamakan *fungsi distribusi kumulatif* atau *fungsi distribusi* saja.

Definisi 4.6: FUNGSI DISTRIBUSI KUMULATIF

Misalnya X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Kita mendefinisikan F sebagai fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak X , dengan:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Definisi 4.7: FUNGSI DISTRIBUSI KUMULATIF DISKRIT

Misalnya X adalah peubah acak diskrit, maka fungsi distribusi kumulatif dari X berbentuk:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t)$$

Pada pembahasan selanjutnya, fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak diskrit akan dinyatakan sebagai fungsi distribusi saja.

Jika peubah acak X mempunyai nilai-nilai yang banyaknya berhingga, yaitu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan masing-masing mempunyai peluangnya $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \dots, p(x_n)$, maka fungsi distribusinya ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && ; x < x_1 \\ &= p(x_1) && ; x_1 \leq x < x_2 \\ &= p(x_1) + p(x_2) && ; x_2 \leq x < x_3 \\ &= p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) && ; x_3 \leq x < x_4 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &= p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + \dots + p(x_n) = 1 && ; x_n \leq x \end{aligned}$$

Jika kita memperhatikan bentuk fungsi distribusi di atas, maka nilainya berupa konstanta semua untuk setiap interval nilai x yang diberikan.

Seperti halnya fungsi peluang atau distribusi peluang dan fungsi densitas, fungsi distribusi juga dapat digambarkan grafiknya. Dalam hal ini, grafik berdasarkan fungsi distribusi dari peubah acak diskrit berupa *fungsi tangga*.

Hal yang perlu diperhatikan dalam fungsi distribusi untuk peubah acak diskrit adalah penulisan notasinya. Notasi untuk fungsi distribusi ditulis dengan huruf besar F, G, H , atau lainnya yang diikuti dengan nilai peubah acaknya. Jadi apabila fungsi peluang dari peubah acak X dinotasikan dengan $p(x)$, maka notasi untuk fungsi distribusinya bisa ditulis dengan $F(x), G(x), H(x)$, atau lainnya.

Definisi 4.8: FUNGSI DISTRIBUSI KUMULATIF KONTINU

Misalnya X adalah peubah acak kontinu, maka fungsi distribusi kumulatif dari X berbentuk:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

dengan $f(t)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di t .

Pada pembahasan selanjutnya, fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak kontinu akan dinyatakan sebagai fungsi distribusi saja.

Nilai fungsi distribusi untuk peubah acak kontinu biasanya berupa konstanta dan fungsi. Grafik fungsi distribusinya mempunyai beberapa kemungkinan, seperti: garis yang berimpit dengan sumbu datar dan kurva, garis, yang berimpit dengan sumbu datar, garis lurus, dan garis yang sejajar dengan sumbu datar, atau garis yang berimpit dengan sumbu datar, kurva, dan garis yang sejajar dengan sumbu datar.

Hal yang perlu diperhatikan dalam fungsi distribusi untuk peubah acak kontinu adalah penulisan notasinya. Karena dari definisi fungsi distribusi notasi yang digunakannya adalah huruf besar F , akan tetapi notasi untuk fungsi distribusinya tidak selalu dengan huruf besar F . Notasi untuk fungsi distribusinya bisa ditulis dengan huruf besar G, H, K , atau lainnya yang

diikuti dengan nilai peubah acaknya dan sebaiknya disesuaikan dengan notasi fungsi densitasnya.

1. Apabila fungsi densitas dari peubah acak Y dinotasikan dengan $g(y)$, maka notasi untuk fungsi distribusinya sebaiknya digunakan $G(y)$.
2. Apabila fungsi densitas dari peubah acak Y dinotasikan dengan $f(y)$, maka notasi untuk fungsi distribusinya sebaiknya digunakan $F(y)$.
3. Apabila fungsi densitas dari peubah acak Y dinotasikan dengan $h(y)$, maka notasi untuk fungsi distribusinya sebaiknya digunakan $H(y)$.
4. Apabila fungsi densitas dari peubah acak Y dinotasikan dengan $k(y)$, maka notasi untuk fungsi distribusinya sebaiknya digunakan $K(y)$.

Kita sudah menjelaskan bahwa penghitungan peluang dari peubah acak yang mempunyai nilai dalam bentuk interval dapat dilakukan berdasarkan fungsi peluang atau fungsi densitas. Selain itu, nilai peluang tersebut, baik diskrit maupun kontinu, dapat diperoleh berdasarkan fungsi distribusi. Hal ini bisa dilakukan dengan rumus:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

dengan a dan b adalah dua bilangan real dan $a < b$.

Adapun penghitungan peluang dari peubah acak yang berharga satu nilai dapat dilakukan dengan rumus:

$$P(X = b) = F_X(b) - F_X(b^-)$$

Jika fungsi peluang atau fungsi densitas dari sebuah peubah acak diketahui, maka kita dapat menentukan fungsi distribusinya. Sebaliknya, kita bisa menentukan fungsi peluang atau fungsi densitas dari sebuah peubah acak, jika fungsi distribusinya diketahui.

Berikut ini kita akan menjelaskan penentuan fungsi peluang atau fungsi densitas untuk peubah acak diskrit dan kontinu, jika fungsi distribusinya diketahui.

A. PEUBAH ACAK DISKRIT

Misalnya bilangan real t terletak dalam interval $(b-h, b]$, yaitu $b-h < t \leq b$, dengan h adalah bilangan positif. Apabila nilai h menuju nol, maka interval tersebut akan menuju ke satu nilai, yaitu $t = b$ dan ditulis:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} P(b-h < X \leq b) &= \lim_{h \rightarrow 0} [F_X(b) - F_X(b-h)] \\ &= F_X(b) - \lim_{h \rightarrow 0} F_X(b-h) \\ &= F_X(b) - F_X(b-h) \end{aligned}$$

Jadi jika b adalah nilai diskontinu dari F_X , maka b adalah nilai dari peubah acak X dengan peluangnya positif. Peluang bahwa $X = b$ merupakan ukuran lonjakan pada $F_X(b)$.

Langkah-langkah untuk menentukan fungsi peluang berdasarkan fungsi distribusinya sebagai berikut:

1. Tentukan nilai-nilai peubah acak X yang menyebabkan fungsi distribusi $F_X(x)$ diskontinu.
2. Tentukan peluang untuk setiap nilai x yang diskontinu, dengan rumus:

$$P(X = x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$$

dengan: x_0 adalah sebuah nilai yang menyebabkan $F_X(x)$ diskontinu

B. PEUBAH ACAK KONTINU

Dalil 4.2: PENENTUAN FUNGSI DENSITAS

Jika $f(x)$ dan $F(x)$ masing-masing merupakan fungsi densitas dan fungsi distribusi dari peubah acak X di x , maka:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

apabila hasil turunannya ada.