FILE : 9

RINGKASAN PERTEMUAN KELIMA
STATISTIKA MATEMATIK 1

DISUSUN OLEH :

NAR HERRHYANTO

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

B A N D U N G

DISTRIBUSI DUA PEUBAH ACAK

Dalam hal ini akan dibahas macam-macam fungsi peluang atau fungsi densitas yang berkaitan dengan dua peubah acak, yaitu distribusi gabungan, distribusi marginal, distribusi bersyarat, dan kebebasan stokastik. Pada bab sebelumnya, kita sudah membahas penggunaan sebuah peubah acak berdasarkan eksperimen. Kita bisa juga menggunakan satu peubah acak lagi berdasarkan eksperimen yang sama, sehingga akan diperoleh nilai pengamatan dari distribusi gabungan dua peubah acak. Selanjutnya, nilai pengamatan tersebut dapat digunakan dalam pengambilan kesimpulan.

.

DISTRIBUSI GABUNGAN

Pembahasan macam-macam distribusi yang berkaitan dengan dua peubah acak selalu didasarkan pada peubah acak berdimensi dua.

Definisi 5.1 : PEUBAH ACAK BERDIMENSI DUA

Jika S merupakan ruang sampel dari sebuah eksperimen, maka pasangan (X,Y) dinamakan peubah acak berdimensi dua, jika X dan Y masing-masing menghubungkan sebuah bilangan real dengan setiap anggota S.

Dalam statistika ada dua macam peubah acak berdimensi dua, yaitu peubah acak berdimensi dua diskrit dan peubah acak kontinu berdimensi dua.

Definisi 5.2: PEUBAH ACAK DISKRIT BERDIMENSI DUA

(X,Y) disebut peubah acak diskrit berdimensi dua, jika banyak nilai-nilai yang mungkin dari (X,Y) salah satunya
berhingga atau tak berhingga tapi dapat dihitung.

Definisi 5.2: PEUBAH ACAK KONTINU BERDIMENSI DUA

(X,Y) disebut peubah acak kontinu berdimensi dua, jika banyak nilai-nilai yang mungkin dari X dan Y masing-masing berbentuk sebuah interval.

Dalam peubah acak diskrit, penghitungan peluang dari peubah acak X dan Y yang masing-masing berharga tertentu, memerlukan sebuah fungsi yang dinamakan *fungsi peluang gabungan*.

Definisi 5.3: FUNGSI PELUANG GABUNGAN

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, maka fungsi yang dinyatakan dengan p(x,y) = P(X = x,Y = y) untuk setiap pasangan nilai (x,y) dalam sebuah daerah hasil dari X dan Y,
dinamakan fungsi peluang gabungan.

Dalil 5.1: SIFAT-SIFAT FUNGSI PELUANG GABUNGAN

Sebuah fungsi berdua peubah acak dapat disebut sebagai distribusi peluang gabungan atau fungsi peluang gabungan dari peubah acak diskrit X dan Y, jika dan hanya jika nilai-nilainya, yaitu p(x,y), memenuhi sifat-sifat sbb:

1. *p(x,y) > 0 untuk setiap pasangan nilai (x,y) dalam daerah asalnya.*
2. $\sum_x \sum_y p(x,y) = 1$

Apabila X mempunyai nilai-nilai $x_1,x_2,x_3,...,x_m$ dan Y mempunyai nilai-nilai $y_1,y_2,y_3,...,y_n$; maka peluang peristiwa X = x_j dan Y = Y_k terjadi dinotasikan dengan $P(X = x_j, Y = y_k) = p(x_j,y_k)$.
Fungsi peluang gabungan dari X dan Y di atas dapat digambarkan dalam Tabel 5.1.

TABEL 5.1
TABEL FUNGSI PELUANG GABUNGAN

X \ Y	y_1	y_2	y_3	...	y_n	Jumlah
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	$p(x_1,y_3)$	...	$p(x_1,y_n)$	$p_1(x_1)$
x_2	$p(x_2,y_1)$	$p(x_2,y_2)$	$p(x_2,y_3)$	...	$p(x_2,y_n)$	$p_1(x_2)$
x_3	$p(x_3,y_1)$	$p(x_3,y_1)$	$p(x_3,y_3)$	...	$p(x_3,y_n)$	$p_1(x_3)$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
x_m	$p(x_m,y_1)$	$p(x_m,y_2)$	$p(x_m,y_3)$	...	$p(x_m,y_n)$	$p_1(x_m)$
Jumlah	$p_2(y_1)$	$p_2(y_2)$	$p_2(y_3)$	...	$p_2(y_n)$	1

Penghitungan peluang dari dua peubah acak X dan Y yang masing-masing berharga tertentu, digunakan rumus:

$$\boxed{P[(X,Y) \in A] = \sum_A \sum p(x,y)}$$

dengan A merupakan himpunan bagian dari daerah asal X dan Y.
Dalam peubah acak kontinu, penghitungan peluang dari dua peubah acak yang masing-masing berharga tertentu, memerlukan sebuah fungsi yang dinamakan *fungsi densitas gabungan*.

Definisi 5.5: FUNGSI DENSITAS GABUNGAN

Sebuah fungsi yang melibatkan dua peubah acak X dan Y dengan nilai-nilainya dinyatakan dalam bidang-xy, dinamakan fungsi densitas gabungan, jika dan hanya jika:

$$\boxed{P[(X,Y) \in A] = \int_A \int f(x,y)\, dx\, dy}$$

dengan A terletak dalam bidang-xy.

Dalil 5.2: SIFAT-SIFAT FUNGSI DENSITAS GABUNGAN

Sebuah fungsi dari dua peubah acak kontinu X dan Y disebut fungsi densitas gabungan, jika nilai-nilainya, yaitu f(x,y), memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $f(x,y) \geq 0$, *untuk* $-\infty < x < \infty$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$

DISTRIBUSI MARGINAL

Apabila kita mempunyai distribusi gabungan dari dua peubah acak X dan Y (bisa diskrit semua atau kontinu semua), maka kita dapat menentukan distribusi untuk masing-masing peubah acak. Jadi kita dapat menentukan distribusi dari peubah acak X dan distribusi dari peubah acak Y. Distribusi yang diperoleh itu dinamakan *distribusi marginal*.

Kita memperhatikan kembali Tabel 5.1.

i. $\{X = x_1\} = \{X = x_1, Y = y_1\} \cup ... \cup \{X = x_1, Y = y_n\}$

$$P(\{X = x_1\}) = P(\{X = x_1, Y = y_1\} \cup ... \cup \{X = x_1, Y = y_n\})$$

$$= P(X = x_1 , Y = y_1) + ... + P(X = x_1 , Y = y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X = x_1, Y = y_i)$$

ii. $\{X = x_2\} = \{X = x_2, Y = y_1\} \cup ... \cup \{X = x_2, Y = y_n\}$

$$P(\{X = x_2\}) = P(\{X = x_2, Y = y_1\} \cup ... \cup \{X = x_2, Y = y_n\})$$

$$= P(X = x_2 , Y = y_1) + ... + P(X = x_2 , Y = y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X = x_2, Y = y_i)$$

iii. $\{X = x_3\} = \{X = x_3, Y = y_1\} \cup ... \cup \{X = x_3, Y = y_n\}$

$$P(\{X = x_3\}) = P(\{X = x_3, Y = y_1\} \cup ... \cup \{X = x_3, Y = y_n\})$$

$$= P(X = x_3 , Y = y_1) + ... + P(X = x_3 , Y = y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X = x_3, Y = y_i)$$

iv. $\{X = x_m\} = \{X = x_m, Y = y_1\} \cup ... \cup \{X = x_m, Y = y_n\}$

$$P(\{X = x_m\}) = P(\{X = x_m, Y = y_1\} \cup ... \cup \{X = x_m, Y = y_n\})$$

$$= P(X = x_m , Y = y_1) + ... + P(X = x_m , Y = y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X = x_m, Y = y_i)$$

Berdasarkan (i) sampai (iv), peluang dari peubah acak X secara umum ditulis:

$$P(\{X = x\}) = \sum_{y \in R_Y} P(\{X = x, Y = y\})$$

atau: $$P(X = x) = \sum_{y \in R_Y} P(X = x, Y = y)$$

atau: $$p(x) = \sum_{y \in R_Y} p(x, y)$$

Kita memperhatikan kembali Tabel 5.1.

i. $\{Y = y_1\} = \{X = x_1, Y = y_1\} \cup ... \cup \{X = x_m, Y = y_1\}$

$$P(\{Y = y_1\}) = P(\{X = x_1, Y = y_1\} \cup ... \cup \{X = x_m, Y = y_1\})$$

$$= P(X = x_1 , Y = y_1) + ... + P(X = x_m , Y = y_1)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_1)$$

ii. $\{Y = y_2\} = \{X = x_1, Y = y_2\} \cup ... \cup \{X = x_m, Y = y_2\}$

$$P(\{Y = y_2\}) = P(\{X = x_1, Y = y_2\} \cup ... \cup \{X = x_m, Y = y_2\})$$
$$= P(X = x_1 , Y = y_2) + ... + P(X = x_m , Y = y_2)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_2)$$

iii. $\{Y = y_3\} = \{X = x_1, Y = y_3\} \cup ... \cup \{X = x_m, Y = y_3\}$

$$P(\{Y = y_3\}) = P(\{X = x_1, Y = y_3\} \cup ... \cup \{X = x_m, Y = y_3\})$$
$$= P(X = x_1 , Y = y_3) + ... + P(X = x_m , Y = y_3)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_3)$$

iv. $\{Y = y_n\} = \{X = x_1, Y = y_n\} \cup ... \cup \{X = x_m, Y = y_n\}$

$$P(\{Y = y_n\}) = P(\{X = x_1, Y = y_n\} \cup ... \cup \{X = x_m, Y = y_n\})$$
$$= P(X = x_1 , Y = y_n) + ... + P(X = x_m , Y = y_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_n)$$

Berdasarkan (i) sampai (iv), peluang dari peubah acak X secara umum ditulis:

$$P(\{Y = y\}) = \sum_{x \in R_X} P(\{X = x, Y = y\})$$

atau: $P(Y = y) = \sum_{x \in R_X} P(X = x, Y = y)$

atau: $p(y) = \sum_{x \in R_X} p(x, y)$

<u>Definisi 5.6</u>: FUNGSI PELUANG MARGINAL

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit dan p(x,y) adalah nilai dari fungsi peluang gabungannya di (x,y), maka fungsi yang dirumuskan dengan:

$$\boxed{p_1(x) = \sum_{y} p(x, y)}$$

untuk setiap x dalam daerah hasil X dinamakan fungsi peluang marginal dari X. Adapun fungsi yang dirumuskan dengan:

$$\boxed{p_2(y) = \sum_{x} p(x, y)}$$

untuk setiap y dalam daerah hasil Y dinamakan fungsi peluang marginal dari Y.

Karena $p_1(x)$ dan $p_2(y)$ masing-masing merupakan fungsi peluang, maka:

i. $\sum_{x} p_1(x) = 1$

ii. $\sum_{y} p_2(y) = 1$

Apabila kita memperhatikan kembali Tabel 5.1, maka fungsi peluang marginal dari X terletak pada kolom jumlah, yaitu:

$p_1(x) = p_1(x_1)$; untuk $x = x_1$

$= p_1(x_2)$; untuk $x = x_2$

.

.

.

$= p_1(x_m)$; untuk $x = x_m$

Adapun fungsi peluang marginal dari Y terletak pada baris jumlah, yaitu:

$p_2(y) = p_2(y_1)$; untuk $y = y_1$

$= p_2(y_2)$; untuk $y = y_2$

.

.

.

$= p_2(y_n)$; untuk $y = y_n$

Kita sudah menjelaskan bahwa fungsi peluang gabungan dari dua peubah acak diskrit X dan Y digunakan untuk memperoleh fungsi peluang marginal masing-masing dari X dan Y. Dengan cara yang sama, fungsi densitas marginal masing-masing dari X dan Y dapat diperoleh dari fungsi densitas gabungannya, jika X dan Y keduanya merupakan peubah acak kontinu. Hal ini bisa dilihat dalam uraian berikut ini.

1. $P(a < X < b) = P(a < X < b\ , -\infty < Y < \infty)$

$$= \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \right] dx$$

Berdasarkan sifat ketiga dalam Definisi 4.5 bahwa:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Karena itu, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$ harus sama dengan $f_1(x)$.

Perumusan ini merupakan fungsi densitas marginal dari X.

2. $P(c < Y < d) = P(-\infty < X < \infty, c < Y < d)$

$$= \int_{y=c}^{d} \left[\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx \right] dy$$

Berdasarkan sifat ketiga dalam Definisi 4.5 bahwa:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Karena itu, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$ harus sama dengan $f_2(y)$.

Perumusan ini merupakan fungsi densitas marginal dari Y.

Definisi 5.7: FUNGSI DENSITAS MARGINAL

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu dan f(x,y) adalah nilai fungsi densitas gabungan di (x,y), maka fungsi yang dirumuskan dengan:

$$\boxed{g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy}$$ untuk $-\infty < x < \infty$

dinamakan fungsi densitas marginal dari X.
Adapun fungsi yang dirumuskan dengan:

$$\boxed{h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx} \quad \text{untuk } -\infty < y < \infty$$

dinamakan fungsi densitas marginal dari Y.

Karena g(x) dan h(y) masing-masing merupakan fungsi densitas, maka:

i. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = 1$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, dy = 1$

DISTRIBUSI BERSYARAT

Dalam Teori Peluang, kita sudah menjelaskan dua buah peristiwa yang bersyarat. Jika A dan B adalah dua buah peristiwa, maka peluang terjadinya peristiwa B diberikan peristiwa A dirumuskan dengan:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \;;\; P(A) > 0$$

Jika A adalah peristiwa X = x dan B adalah peristiwa Y = y, maka:

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x \cap Y = y)}{P(X = x)}$$

$$= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

$$p(y \mid x) = \frac{p(x,y)}{p_1(x)} \;;\; p_1(x) > 0$$

Dari perumusan di atas, kita dapat mendefinisikan fungsi peluang bersyarat dari sebuah peubah acak diberikan peubah acak lainnya.

<u>Definisi 5.8</u>: FUNGSI PELUANG BERSYARAT

Jika p(x,y) adalah fungsi peluang gabungan dari dua peubah acak diskrit X dan Y di (x,y) dan $p_2(y)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari Y di y, maka fungsi yang dinyatakan dengan:

$$\boxed{p(x \mid y) = \frac{p(x,y)}{p_2(y)}} \quad ;\; p_2(y) > 0$$

untuk setiap x dalam daerah hasil X, dinamakan fungsi peluang bersyarat dari X diberikan Y = y.

Jika $p_1(x)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari X di x, maka fungsi yang dirumuskan dengan:

$$p(y \mid x) = \frac{p(x,y)}{p_1(x)} \quad ; p_1(x) > 0$$

untuk setiap y dalam daerah hasil Y, dinamakan fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan X =x.

Karena $p(x \mid y)$ dan $p(y \mid x)$ masing-masing merupakan fungsi peluang, maka kedua fungsi peluang itu harus memenuhi sifat sebagai berikut:

1.a. $p(x \mid y) \geq 0$

b. $\sum_x p(x|y) = 1$

2.a. $p(y \mid x) \geq 0$

b. $\sum_y p(y|x) = 1$

<u>Definisi 5.9</u>: FUNGSI DENSITAS BERSYARAT

Jika f(x,y) adalah nilai fungsi densitas gabungan dari dua peubah acak kontinu X dan Y di (x,y) dan $f_2(y)$ adalah nilai fungsi densitas marginal dari Y di y, maka fungsi yang dirumuskan dengan:

$$g(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \quad ; f_2(y) > 0$$

untuk setiap x dalam daerah hasil X, dinamakan fungsi densitas bersyarat dari X diberikan Y = y.

Jika $f_1(x)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari X di x, maka fungsi yang dirumuskan dengan:

$$h(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \quad ; f_1(x) > 0$$

untuk setiap y dalam daerah hasil Y, dinamakan fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X =x.

Karena $g(x \mid y)$ dan $h(y \mid x)$ masing-masing merupakan fungsi densitas, maka kedua fungsi densitas itu harus memenuhi sifat sebagai berikut:

1.a. $g(x \mid y) \geq 0$

b. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x|y)\, dx = 1$

2.a. $h(y \mid x) \geq 0$

b. $\int_{-\infty}^{\infty} h(y|x)\, dy = 1$

KEBEBASAN STOKASTIK

Jika kita mempunyai dua buah peubah acak X dan Y, baik diskrit maupun kontinu, maka kita dapat mengetahui apakah kedua peubah acak itu bebas stokastik atau tidak bebas stokastik.

Definisi 5.10: KEBEBASAN STOKASTIK DISKRIT

Misalnya dua peubah acak diskrit X dan Y mempunyai nilai fungsi peluang gabungan di (x,y), yaitu p(x,y) serta masing-masing mempunyai nilai fungsi peluang marginal dari X di x, yaitu $p_1(x)$ dan nilai fungsi peluang marginal dari Y di y, yaitu $p_2(y)$.

Kedua peubah acak X dan Y dikatakan bebas stokastik, jika dan hanya jika:

$$\boxed{p(x,y) = p_1(x).p_2(y)}$$

untuk semua pasangan nilai (x,y).

Dalam prakteknya, soal yang menyangkut kebebasan stokastik dua peubah acak diskrit ini fungsi peluang gabungan dari kedua peubah acak harus diketahui bentuknya. Kemudian kita menentukan dahulu fungsi peluang marginal dari masing-masing peubah acak. Selanjutnya kita mensubstitusikan semua pasangan nilai dari kedua peubah acak itu kedalam persyaratan kebebasan stokastik, dan kita memperhatikan hasilnya dengan kriteria sbb:

a. Apabila ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka kedua peubah acak itu dikatakan bebas stokastik.
b. Apabila ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan, maka kedua peubah acak itu dikatakan tidak bebas stokastik atau bergantungan untuk minimal satu pasangan nilai peubah acak.

Definisi 5.11: KEBEBASAN STOKASTIK KONTINU

Misalnya dua peubah acak kontinu X dan Y mempunyai nilai fungsi densitas gabungan di (x,y), yaitu f(x,y) serta masing- masing mempunyai nilai fungsi densitas marginal dari X di x, yaitu $f_1(x)$ dan nilai fungsi densitas marginal dari Y di y, yaitu $f_2(y)$.

Kedua peubah acak X dan Y dikatakan bebas stokastik, jika dan hanya jika:

$$\boxed{f(x,y) = f_1(x).f_2(y)}$$

Dalam prakteknya, soal yang menyangkut kebebasan stokastik dua peubah acak kontinu ini fungsi densitas gabungan dari kedua peubah acak harus diketahui bentuknya. Kemudian kita menentukan dahulu fungsi densitas marginal dari masing-masing peubah acak. Selanjutnya kita menggunakan persyaratan kebebasan stokastik, dan kita memperhatikan hasilnya dengan kriteria sbb:

a. Apabila ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka kedua peubah acak itu dikatakan bebas stokastik.
b. Apabila ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan, maka kedua peubah acak itu dikatakan tidak bebas stokastik atau bergantungan.