Modul 2

Representasi Graph dan Beberapa Graph Khusus

Prof. Dr. Didi Suryadi, M.Ed.
Dr. Nanang Priatna, M.Pd.

PENDAHULUAN

Walaupun representasi graph secara piktorial merupakan hal yang sangat menarik dalam kajian teori graph secara visual, representasi lainnya juga dirasa sangat penting khususnya yang berkaitan dengan pemrosesan melalui komputer. Ada beberapa cara untuk merepresentasikan graph, yaitu dengan notasi himpunan, matriks ajasensi, matriks insidensi, dan dengan diagram atau gambar.

Mengingat materi yang disajikan dalam Modul 2 ini sangat mendukung pembahasan modul selanjutnya, maka pemahaman yang baik tentang materi yang disajikan merupakan langkah tepat dalam upaya memahami materi setiap modul secara keseluruhan.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan mengenal beberapa representasi graph dan beberapa graph khusus.

Setelah mempelajari modul ini secara khusus Anda diharapkan mampu:

1. menyatakan graph dalam notasi himpunan;
2. menyatakan graph dalam notasi matriks ajasensi;
3. menyatakan graph dalam notasi matriks insidensi;
4. menggambar graph dari notasi himpunan atau matriks yang diketahui;
5. menjelaskan sifat-sifat beberapa graph khusus.

Kegiatan Belajar 1

Representasi Graph

A. GRAPH DALAM NOTASI HIMPUNAN

Sebuah graph G adalah suatu himpunan V yang tidak kosong yang memenuhi sifat tidak refleksif dan simetris dari suatu relasi R pada V. Karena R simetris, maka untuk setiap pasangan terurut (u, v) $\in$ R, pasangan terurut (v, u) juga elemen R. Himpunan pasangan terurut simetris dalam R dinotasikan dengan E. Sebagai contoh, sebuah graph G dapat didefinisikan dengan himpunan.

$$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$$

dan relasi

$$R = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$$

Dalam hal ini,

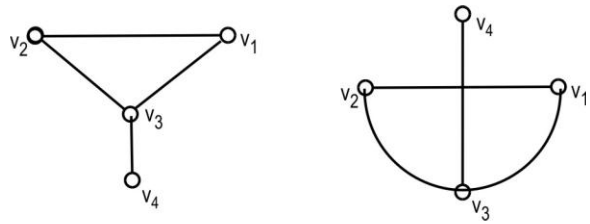
$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$$

Dalam sebuah graph G, V merupakan sebuah *himpunan titik* dan tiap elemen dari V disebut *titik*. Banyaknya *titik* dalam G disebut *orde* dari G. Tiap elemen dari E disebut sisi dan E sendiri disebut himpunan sisi dari G. Banyaknya sisi dalam G disebut *ukuran* dari G. Dengan demikian | V | = orde dari G dan | E | = ukuran dari G.

Jika G merupakan sebuah graph yang didefinisikan dalam bentuk sebuah himpunan titik V dan suatu relasi R pada V, maka (u, v) $\in$ R membawakan (v, u) $\in$ R. Dengan demikian {(u, v), (v, u)} adalah sebuah sisi dari G. Untuk memudahkan dalam penulisan, sebuah sisi biasanya cukup dinotasikan dengan uv atau vu. Himpunan sisi E menentukan relasi R. Dengan demikian graph G yang diberikan sebagai ilustrasi di atas dapat didefinisikan sebagai himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4\}$. Orde dan ukuran dari G adalah 4. Himpunan titik dari G dapat juga dinotasikan dengan V (G) dan himpunan sisinya dinotasikan dengan E (G). Penggunaan notasi seperti ini sangat bermanfaat khususnya apabila kita membicarakan dua graph atau lebih.

Himpunan V x V dimungkinkan berupa himpunan kosong, karena relasi R pada V memenuhi sifat tidak refleksif dan antisimetris. Hal ini berakibat bahwa himpunan sisi dari suatu graph bisa berupa himpunan kosong atau dengan kata lain sebuah graph mungkin tidak memiliki sisi.

Berkenaan dengan pembicaraan sebuah graph, seringkali kita menyatakannya dalam bentuk diagram. Dalam diagram seperti ini titik dinyatakan sebagai sebuah noktah atau lingkaran kecil dan sisi dinyatakan oleh segmen garis yang menghubungkan dua titik tertentu. Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh diagram pada gambar di bawah ini.



Gambar 2.1.

Walaupun dua diagram pada Gambar 2.1 di atas kelihatannya berbeda, namun sebenarnya dua diagram tersebut menyatakan graph yang sama.

Jika $e = uv \in E(G)$, maka dikatakan bahwa e menghubungkan titik u dan v. Dua titik u dan v disebut berbatasan dalam G, jika $uv \in E(G)$. Jika $uv \notin E(G)$, maka u dan v merupakan dua titik yang *tidak saling berbatasan*. Jika $e = uv \in E(G)$, maka u dan v masing-masing disebut ujung dari e. Jika uv dan uw merupakan dua sisi berbeda dari G ($v \neq w$), maka uv dan uw adalah dua sisi yang berbatasan. Dengan demikian dalam graph G pada Gambar 2.1, v_1 dan v_3 berbatasan, sedangkan v_1 dan v_4 tidak berbatasan. Titik v_3 merupakan ujung dari sisi v_2v_3 sedangkan v_4 bukan ujung dari v_2v_3. Sisi v_1v_3 dan v_3v_4 adalah dua sisi yang berbatasan; sisi v_1v_2 dan v_3v_4 tidak berbatasan.

B. GRAPH DALAM NOTASI MATRIKS INSIDENSI

Misalkan G adalah sebuah graph dengan n titik, e sisi, dan tidak memuat loop. Definisikan sebuah matriks A = [a_{ij}] berordo n x e dengan n menyatakan baris dan e menyatakan kolom sebagai berikut:

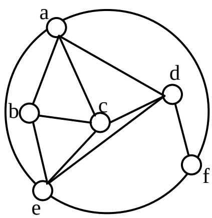
Elemen matriks

a_{ij} = 1 jika sisi ke-j e_j insiden dengan titik v_i dan

a_{ij} = 0 jika sebaliknya

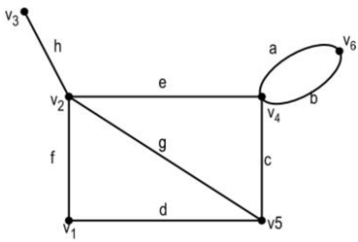
Contoh 1

Misalkan diketahui V(G) = {a, b, c, d, e, f} dan E(G) = {(a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (a,f), (b,c), (b,e), (c,d), (c,e), (d,e), (d,f), (e,f)}. Maka G dapat dilukiskan dengan Gambar 2.2 di samping.



Gambar 2.2

Matriks A dari sebuah graph biasanya dinotasikan dengan A (G). Contoh sebuah graph dengan matriks insidensinya disajikan pada Gambar 2.3 di bawah ini. Matriks semacam ini disebut *matriks insidensi*.



(a)

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

(b)

Gambar 2.3.

Sebuah matriks insidensi hanya memuat dua kemungkinan elemen yaitu 0 dan 1. Matriks seperti ini disebut *matriks biner* atau *matriks* (0,1). Misalkan elemen 0 dan 1 tersebut berasal dari lapangan Galois modulo 2. Jika diberikan suatu graph yang direpresentasikan secara geometris, maka matriks insidensinya dapat dengan mudah dibuat. Di lain pihak, bila diberikan sebuah matriks insidensi A (G), kita juga bisa secara mudah menyatakannya secara geometris. Dengan demikian, kedua representasi tersebut sebenarnya memuat informasi yang sama tentang suatu graph tertentu.

Jika sebuah matriks insidensi kita observasi secara lebih teliti, maka akan diperoleh beberapa hal berikut:

1. Karena tiap sisi hanya insiden dengan tepat dua titik, maka tiap kolom dari matriks A hanya memuat tepat dua elemen 1.
2. Banyaknya elemen 1 pada tiap baris sama dengan derajat dari titik yang berpadanan.
3. Sebuah baris yang semua elemennya 0, menyatakan sebuah titik terisolasi.
4. Sisi-sisi paralel dalam sebuah graph akan menghasilkan kolom-kolom yang sama pada matriks insidensinya.
5. Jika sebuah graph G tidak terhubung dan terdiri atas dua komponen g_1 dan g_2, maka matriks insidensi A (G) dari graph G tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$A(G) = \left[\begin{array}{c|c} A(g_1) & 0 \\ \hline 0 & A(g_2) \end{array}\right]$$

dengan $A(g_1)$ dan $A(g_2)$ masing-masing merupakan matriks insidensi dari 2 komponen g_1 dan g_2. Hal ini didasarkan atas fakta bahwa tidak ada satu pun sisi dalam g_1 yang insiden dengan suatu titik di g_2, dan demikian pula sebaliknya. Jelas, bahwa hasil ini berlaku juga untuk setiap graph tidak terhubung dengan sejumlah komponen tertentu.

6. Permutasi dari dua baris atau kolom dalam sebuah matriks insidensi berpadanan dengan pelabelan kembali titik-titik dan sisi-sisi dari graph yang sama. Hasil observasi ini membawa kita pada teorema berikut.

Teorema 1

Dua graph G_1 dan G_2 adalah isomorfik jika dan hanya jika kedua matriks insidensinya yaitu $A(G_1)$ dan $A(G_2)$ hanya berbeda melalui permutasi baris dan kolom.

Rank dari matriks insidensi: tiap baris dalam sebuah matriks insidensi A(G) dapat dipandang sebagai sebuah vektor GF(2) dalam ruang vektor graph G. Misalkan vektor pada baris pertama disebut A_1, pada baris kedua A_2, dan seterusnya. Dengan demikian,

$$A(G) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_3 \end{bmatrix} \qquad \text{persamaan (1)}$$

Karena terdapat tepat dua elemen 1 pada tiap kolom A, maka jumlah semua vektor ini adalah 0. Jadi vektor A_1, A_2, ..., A_n adalah vektor-vektor yang tidak bebas linier. Dengan demikian, rank A lebih kecil dari n, yaitu rank A < n - 1.

Selanjutnya pandang jumlah m vektor dengan m < n-1. Jika graph G terhubung, maka A(G) tidak bisa dipartisikan, seperti terlihat dalam persamaan (1), sehingga $A(g_1)$ adalah matriks dengan m baris dan $A(g_2)$ adalah matriks dengan n-m baris. Dengan kata lain, tidak ada submatriks m x m dari A(G) yang dapat diperoleh, sehingga jumlah modulo 2 dari m baris tersebut sama dengan 0.

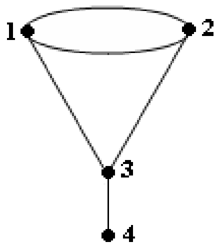
Karena hanya terdapat dua konstanta 0 dan 1 dalam lapangan ini, penjumlahan m vektor dengan m < n-1 menutup kemungkinan adanya kombinasi linear dari m vektor baris. Dengan demikian telah diperlihatkan bahwa tidak ada kombinasi linear dari m vektor baris A(m < n-1) yang nilainya sama dengan 0. Jadi, rank matriks A(G) paling tidak bernilai n-1.

Karena rank A(G) tidak lebih dari n-1 dan juga tidak kurang dari n-1, maka pastilah rank tersebut sama dengan n-1. Dengan demikian kita peroleh teorema berikut ini.

Teorema 2

Jika A(G) merupakan sebuah matriks insidensi dari suatu graph terhubung dengan n titik, maka rank dari A(G) adalah n-1.

Argumen yang digunakan untuk membuktikan Teorema 2 di atas dapat diperluas untuk membuktikan bahwa rank dari A(G) adalah n-k, jika G merupakan sebuah graph tidak berhubung dengan n titik dan k komponen. Dengan demikian rank dari graph dengan k komponen adalah n-k.
Perhatikan contoh berikut ini.



$$\begin{array}{ccc} & & \text{kolom} \\ & & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\end{array} \\ \text{baris} & \begin{array}{c}1\rightarrow\\2\rightarrow\\3\rightarrow\\4\rightarrow\end{array} & \begin{bmatrix}0&2&1&0\\2&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

Gambar 2.4.

Terdapat empat titik pada graph di atas, dan terdapat makriks 4 x 4. Elemen-elemen matriks menunjukkan banyaknya sisi yang menghubungkan pasangan titik di dalam graph tersebut.
Misalnya:

- Titik 1 dan 2 dihubungkan oleh 2 sisi, sehingga angka 2 muncul di baris 1 kolom 2 dan di baris 2 kolom 1.
- Titik 2 dan 4 dihubungkan oleh 0 sisi, sehingga angka 0 muncul di baris 2 kolom 4 dan di baris 4 kolom 2.
- Titik 1 dan 3 dihubungkan oleh 1 sisi, sehingga angka 1 muncul di baris 1 kolom 3 dan di baris 3 kolom 1.

Catatan:
Bila graphnya tidak memiliki loop, maka diagonal utamanya (kiri atas ke kanan bawah) terdiri dari angka 0. Matriks ajasensi itu merupakan matriks persegi yang simetris pada diagonal utamanya.

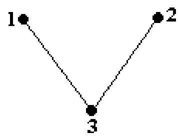
Salah satu sifat menarik dari matriks ajasensi suatu graph adalah makna dari elemen-elemen matriks jika matriksnya dipangkatkan.

Marilah kita lihat apa yang terjadi jika matriks ajasensi dari graph di atas dikalikan dengan dirinya sendiri. Untuk mudahnya matriks itu kita beri nama M dan akan kita hitung M^2.

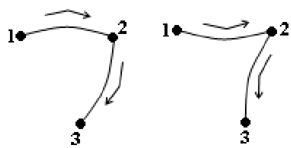
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sebagai ilustrasi mari kita lihat graph pada gambar 2.4 di atas. Elemen (1,2) pada matriks M^2 adalah 1 yang artinya ada 1 jalan yang panjangnya 2 (sesuai dengan pangkat matriks M) antara 1 dan 2, yaitu 132.



Elemen (1,3) pada matriks M^2 adalah 2 yang maknanya ada 2 jalan yang panjangnya 2 antara 1 dan 3, yaitu 123 dan 123.



Jalan : 123 123

Sedangkan elemen (1,1) pada maritks M^2 adalah 5 yang artinya ada 5 jalan yang panjangnya 2 dari 1 ke 1, yaitu 121, 121, 121, 121, dan 131.

jalan: 121, 121, 121, 121, 131

Secara umum, elemen (i,j) dari matriks M^n merupakan bilangan yang menunjukan banyak jalan yang panjangnya n dari titik i ke titik j pada graphnya.

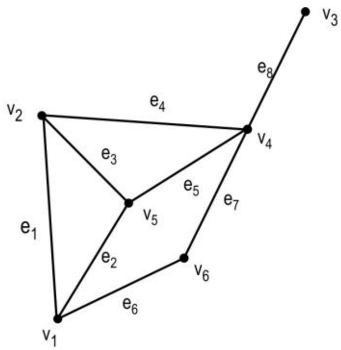
C. GRAPH DALAM NOTASI MATRIKS AJASENSI

Sebuah graph, selain dapat dinyatakan sebagai suatu matriks insidensi, dapat juga dinyatakan dalam bentuk matriks lain yakni *matriks ajasensi* atau *matriks koneksi*. Matriks ajasensi sebuah graph G dengan n titik dan tidak memuat sisi paralel adalah sebuah matriks $X = [X_{ij}]$ berordo n x n yang didefinisikan pada ring bilangan bulat sedemikian hingga

$X_{ij} = 1$, jika terdapat sebuah sisi antara titik ke-i dan titik ke-j, dan

$X_{ij} = 0$, jika tidak ada satu sisi pun antara kedua titik tersebut

Contoh sebuah graph sederhana dengan matriks ajasensinya dapat dilihat pada Gambar 2.5 di bawah ini.



(a)

$$X = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(b)

Gambar 2.5.

Bila matriks ajasensi X dari graph G kita teliti secara seksama, akan diperoleh beberapa hal berikut.

1. Elemen-elemen matriks X sepanjang diagonal utama semuanya bernilai 0 jika dan hanya jika graph dari matriks tersebut tidak memuat loop. Sebuah loop pada titik ke-i berpadanan dengan $X_{ij} = 1$.
2. Menurut definisi matriks ajasensi, tidak ada ketentuan untuk sisi-sisi paralel. Dengan demikian, matriks ajasensi X hanya didefinisikan untuk graph yang tidak memuat sisi paralel.
3. Jika graph tidak memuat loop dan sisi tidak paralel, derajat suatu titik sama dengan jumlah atau banyaknya elemen 1 pada baris atau kolom dari X yang bersesuaian.
4. Permutasi baris dan kolom yang bersesuaian mengakibatkan terjadi perubahan pada posisi titik-titiknya. Perlu dicatat bahwa dalam melakukan permutasi, baris dan kolom harus disusun dalam urutan yang sama. Jadi, jika dua baris dalam X dipertukarkan, maka kolom yang bersesuaian juga harus dipertukarkan. Dengan demikian dua graph G_1 dan G_2 yang tidak memuat sisi paralel adalah isomorfik jika dan hanya jika matriks-matriks ajasensinya yakni $X(G_1)$ dan $X(G_2)$ saling berkaitan.

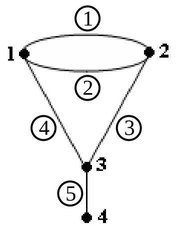
$$X(G_2) = R^{-1}.\ X(G_1).\ R,$$

   dengan R merupakan sebuah matriks permutasi.
5. Sebuah graph G tidak terhubung dan terdiri atas dua komponen g_1 dan g_2 jika dan hanya jika matriks ajasensinya yakni X(G) dapat dipartisikan sebagai

$$X(G) = \left[\begin{array}{c|c} X(g_1) & 0 \\ \hline 0 & X(g_2) \end{array}\right]$$

   dengan $X(g_1)$ adalah matriks ajasensi dari komponen g_1 dan $X(g_2)$ adalah matriks ajasensi dari g_2. Jelas bahwa partisi ini mengakibatkan tidak adanya sisi yang menghubungkan suatu titik pada subgraph g_1 dengan titik dalam subgraph g_2.
6. Diberikan sebuah matriks biner Q berordo n. Maka, selalu bisa dibentuk sebuah graph G dengan n titik (dan tidak memuat sisi-sisi paralel) sehingga Q merupakan matriks ajasensi dari G.

Bila matriks ajasensi suatu graph menyatakan keajasensian titik-titiknya, maka matriks insidensi menyatakan insidensi titik dan sisinya. Perhatikan contoh berikut ini. Baris menunjukkan label titiknya, sedang kolom menunjukkan label sisinya.



$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{ccccc}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}&\text{⑤}\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\end{array}\\ \text{baris} & \begin{array}{c}1\rightarrow\\2\rightarrow\\3\rightarrow\\4\rightarrow\end{array} & \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

Gambar 2.6.

Pada graph di atas terdapat empat titik dan lima sisi. Di sebelah kanannya terdapat matriks 4×5. Elemen-elemen matriks itu hanya bilangan 1 atau 0, tergantung pada insidensi titik dan sisi itu.

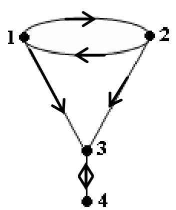
Misalnya:

- Titik 1 insiden pada sisi 4, sehingga angka 1 muncul di baris 1 kolom 4.
- Titik 2 tidak insiden pada sisi 4, sehingga angka 0 muncul di baris 2 kolom 4.
- Titik 4 insiden pada garis 5, sehingga angka 1 muncul di baris 4 kolom 5.

Matriks ajasensi dan matriks insidensi hanyalah dua macam matriks dari sekian banyak matriks yang dapat didefinisikan untuk graph. Demikian pula untuk sisi berarah dapat dibuat berbagai macam matriksnya.

D. MATRIKS AJASENSI UNTUK GRAPH BERARAH

Perhatikan graph berikut serta matriks ajasensinya.



$$\begin{array}{ccc} & & \text{ke}\\ & & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\end{array}\\ \text{baris} & \begin{array}{c}1\rightarrow\\2\rightarrow\\3\rightarrow\\4\rightarrow\end{array} & \begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

Gambar 2.7.

Tidak ada sisi dari 1 ke 1, sehingga angka 0 muncul di baris 1 kolom 1

Ada 1 sisi dari titik 1 ke 2, sehingga angka 1 muncul di baris 1 kolom 2

Ada 1 sisi dari titik 2 ke 1, sehingga angka 1 muncul di baris 2 kolom 1
Ada 1 sisi dari titik 1 ke 3, sehingga angka 1 muncul di baris 1 kolom 3
Ada 0 sisi dari titik 3 ke titik lainnya, sehingga ada empat angka 0 di baris 3.

Sekarang akan kita coba mengalikan matriks ajasensi untuk graph di atas, yang kita beri nama *A* dengan dirinya sendiri. Akan diperoleh matriks A^2 seperti di bawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

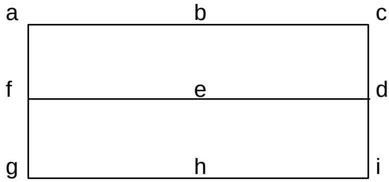
Elemen (i,j) dari matriks A^2 merupakan hasil kali baris ke-i dan kolom ke-j matriks aslinya.
Elemen (i,j) ini menunjukan banyaknya jalan yang panjangnya 2 (sesuai dengan pangkat matriksnya) dari i ke j.
Elemen (1,1) adalah 1 yang artinya ada 1 jalan yang panjangnya 2 dari titik 1 ke titik 1 lagi, yaitu 121.
Elemen (2,3) adalah 1 yang artinya ada 1 jalan yang panjangnya 2 dari titik 2 ke titik 3, yaitu 213.
Elemen (2,4) adalah 0 yang artinya ada 0 jalan atau tidak ada jalan yang panjangnya 2 antara titik 2 dan titik 4.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

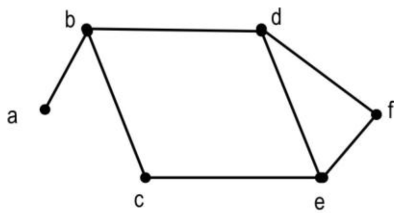
1) Jika diketahui V = {a, b, c, d, e, f, g, h} dan
E = {ab, ad, bc, cd, be, df, eh, hf, eg, fg}, gambarlah graph G = (V,E)!

2) Jika diketahui sebuah graph dengan diagram seperti di bawah ini.



tentukan himpunan V dan E dari graph tersebut.

3) Jika G adalah sebuah graph dengan diagram seperti di bawah ini



G

tentukan matriks insidensinya!

4) Tentukan matriks ajasensi dari graph pada soal nomor 3.

5) Gambarlah graph dari matriks insidensi di bawah ini!

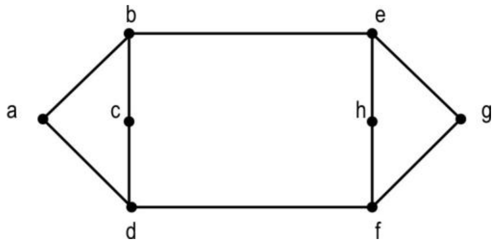
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

6) Gambarlah graph G dari matriks ajasensi di bawah ini!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Petunjuk Jawaban Latihan

1)



2) V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i} dan
E = {ab, bc, cd, de, di, ef, fa, fg, gh, hi}

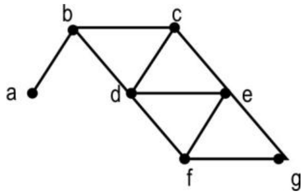
3) Matriks insidensinya adalah

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

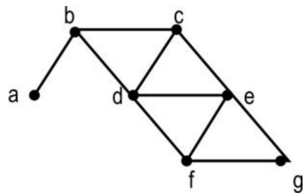
4) Matriks ajasensinya adalah

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

5)



6) Gambar graph untuk matriks ajasensi tersebut sama dengan graph pada No 5.



RANGKUMAN

1. Sebuah graph G adalah suatu himpunan hingga V yang elemennya berupa titik-titik dan sebuah himpunan sisi E.
2. Misalkan G adalah sebuah graph dengan n titik, e sisi, dan tidak memuat loop. Sebuah matriks yang elemennya didefinisikan sebagai berikut:
   a_{ij} = 1, jika sisi ke-j e_j insiden dengan titik v_i dan
   a_{ij} = 0, jika sebaliknya
   adalah sebuah matriks berordo n x e yang disebut matriks insidensi.

3. Dua graph G_1 dan G_2 adalah isomorfik jika dan hanya jika kedua matriks insidensinya yaitu $A(G_1)$ dan $A(G_2)$ hanya berbeda melalui permutasi baris dan kolom.
4. Jika A(G) merupakan sebuah matriks insidensi dari suatu graph terhubung G dengan n titik, maka rank dari A(G) adalah n-1.
5. Misalkan G adalah sebuah graph dengan n titik dan tidak memuat sisi paralel. Sebuah matriks X berordo n x n yang didefinisikan sebagai berikut:
   $X_{ij} = 1$, jika terdapat sebuah sisi antara titik ke-i dan titik ke-j, dan
   $X_{ij} = 0$, jika tidak ada satu sisi pun antara kedua sisi tersebut.
   maka X disebut matriks ajasensi.

TES FORMATIF 1

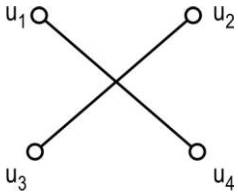
Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

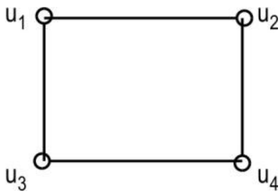
1) Jika graph G berorde 3, maka ukuran yang mungkin dari G adalah ....
   A. 1, 2, 3
   B. 0, 1, 2
   C. 1, 2, 3, 4
   D. 0, 1, 2, 3

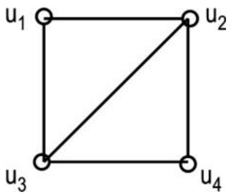
2) Misalkan himpunan titik dan sisi dari graph berorde 3 yang tiap dua titiknya berbatasan serta tiap dua sisinya berbatasan adalah ....
   A. $V = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $E = \{u_1u_2, u_2u_2, u_3u_3\}$
   B. $V = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $E = \{u_1u_2, u_1u_3, u_3u_3\}$
   C. $V = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $E = \{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3\}$
   D. $V = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $E = \{u_1u_2, u_2u_3, u_1u_1\}$

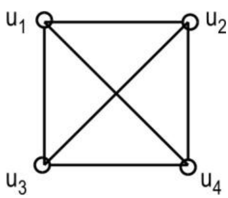
3) Misalkan n lebih besar atau sama dengan 2 adalah sebuah bilangan bulat. Jika G merupakan graph berorde n dan G memuat sebuah titik yang berbatasan dengan semua titik lain dari G, maka ukuran minimum yang mungkin dari G adalah ....
   A. n + 1
   B. n – 2
   C. n
   D. n – 1

4) Graph G dengan $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E = \{u_1u_2, u_2u_4, u_1u_3, u_3u_4\}$ dapat digambar sebagai berikut ....

A) 

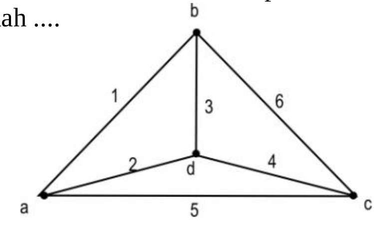
B) 

C) 

D) 

5) Perhatikan graph pada gambar di bawah ini. Baris pertama dari matriks ajasensi graph tersebut adalah ....

A. 0 1 1 1
B. 0 1 0 1
C. 0 0 1 1
D. 1 0 1 1



6) Elemen-elemen diagonal utama matriks ajasensi dari graph pada soal nomor 5 adalah ....
A. 0 0 0 0
B. 1 1 1 1
C. 1 1 0 0
D. 0 0 1 1

7) Perhatikan matriks di bawah ini.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Banyaknya titik berderajat 2 pada graph dari matriks tersebut adalah ....
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

8) Banyaknya titik berderajat 3 pada graph yang diperoleh dari matriks soal nomor 7 adalah ....
A. 4
B. 1
C. 2
D. 3

9) Elemen-elemen baris pertama matriks insidensi yang diperoleh dari graph pada soal nomor 5 adalah ....
A. 1 1 1 0 0 0
B. 0 0 0 1 1 1
C. 1 1 0 0 1 0
D. 1 0 1 1 1 0

10) Elemen-elemen kolom terakhir dari matriks insidensi yang diperoleh dari graph pada soal nomor 5 adalah ....
A. 0 1 1 0
B. 1 1 0 0
C. 0 0 1 1
D. 1 0 0 1

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

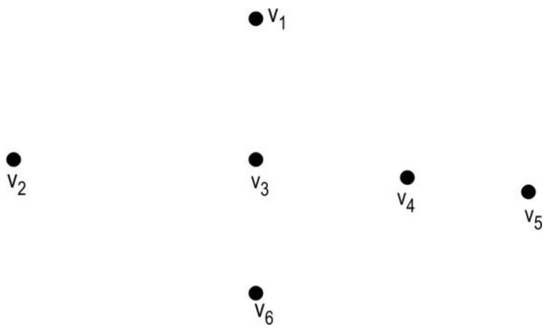
Kegiatan Belajar 2

Beberapa Graph Khusus

A. GRAPH NOL

Dalam definisi graph G = (V, E), himpunan sisi E dimungkinkan merupakan sebuah himpunan kosong. Graph seperti ini, yakni graph yang tidak memiliki sisi, disebut *graph nol*. Dengan kata lain, tiap titik dalam sebuah graph nol merupakan titik-titik terisolasi. Sebuah graph nol dengan enam titik dapat dilihat pada Gambar 2.8. Walaupun himpunan sisi dimungkinkan kosong, himpunan titik dari suatu graph tidak boleh kosong. Dengan kata lain, sebuah graph paling tidak harus memiliki sebuah titik.

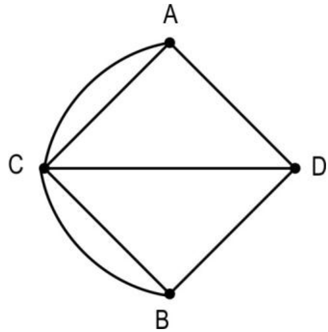
Beberapa daerah pemukiman baru yang akan mempunyai jaringan transportasi jalan raya di antara sesamanya dapat diwakili dengan graph nol. Notasi graph nol adalah N_n dengan n sebagai banyaknya titik dari N.



Gambar 2.8.
Graph nol dengan enam titik

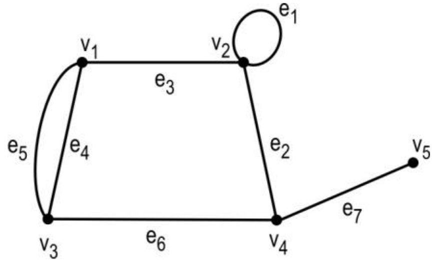
B. GRAPH SEDERHANA

Sebuah graph yang tidak memiliki loop dan sisi paralel disebut *graph sederhana*. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.9 di bawah ini.



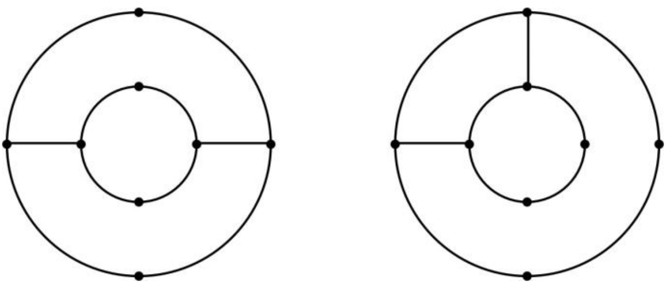
Gambar 2.9.

Karena graph tersebut memuat sisi paralel, maka graph tersebut tidak termasuk graph sederhana. Selanjutnya, graph pada Gambar 2.10 di bawah ini tidak termasuk graph sederhana sebab termuat di dalamnya sebuah loop dan dua sisi paralel.



Gambar 2.10.

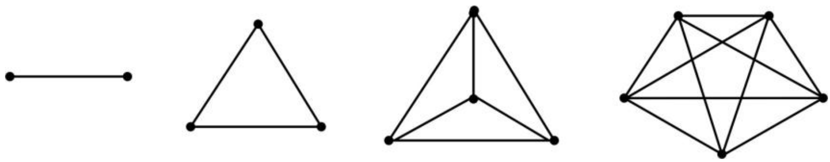
Sedangkan bila kita perhatikan dua graph pada Gambar 2.11 di bawah ini, karena tidak memuat loop dan sisi paralel, maka kedua graph tersebut merupakan graph sederhana.



Gambar 2.11.

C. GRAPH LENGKAP

Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graph sederhana. Jika tiap pasangan titik V_i , V_j terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya, maka G disebut *graph lengkap*. Gambar 2.12 di bawah ini adalah empat contoh graph lengkap dengan dua, tiga, empat, dan lima sisi.



K_2 K_3 K_4 K_5

Gambar 2.12

Sebuah graph lengkap sering juga disebut sebagai *graph universal*. Karena tiap titik dalam graph lengkap selalu dihubungkan dengan titik lain melalui satu sisi, maka derajat tiap titik dalam sebuah graph lengkap G dengan n titik adalah n-1. Sebuah graph lengkap dengan n titik dapat dinotasikan dengan K_n. Dengan demikian, banyaknya sisi dalam G adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

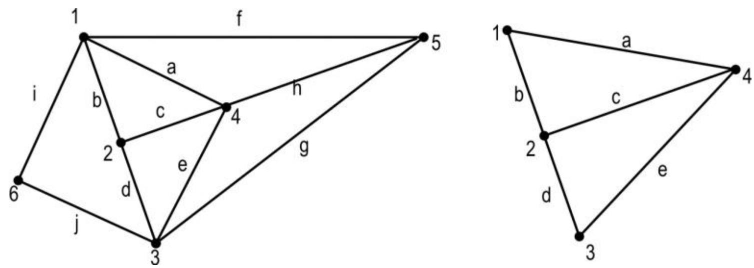
Peristiwa saling berkenalan di antara sesama siswa baru dapat dimodelkan dengan graph lengkap, misalnya K_4 dan K_5 yang disajikan pada Gambar 2.12. Kedua graph tersebut masing-masing mempunyai enam dan sepuluh buah sisi. Selanjutnya mudah diperiksa dengan rumus bahwa K_n mempunyai $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi.

D. GRAPH BAGIAN (SUBGRAPH)

Sebuah graph g disebut graph bagian atau subgraph dari G jika semua titik dan sisi dari g termuat dalam G, dan tiap sisi dari g memiliki titik-titik ujung yang sama baik dalam g maupun dalam G. Sebagai contoh, graph dalam Gambar 2.13 bagian (b) merupakan sebuah graph bagian dari graph gambar (a). Karena konsep subgraph dapat dianalogikan dengan konsep himpunan bagian dalam teori himpunan, maka sebuah subgraph dapat dipandang sebagai bagian dari graph yang lain. Untuk menyatakan bahwa "g merupakan bagian dari graph G" dapat ditulis g < G.

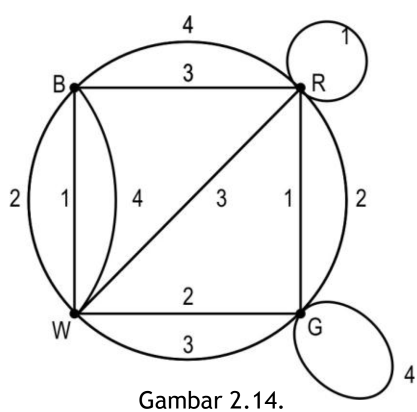
Jika kita telaah lebih jauh, maka akan diperoleh beberapa sifat berikut ini.

1. Setiap graph merupakan subgraph dari dirinya sendiri.
2. Subgraph dari suatu subgraph dari G adalah subgraph dari G.
3. Sebuah titik dalam graph G merupakan subgraph dari G.
4. Sebuah sisi dari G bersamaan dengan kedua titik ujungnya juga merupakan subgraph dari G.

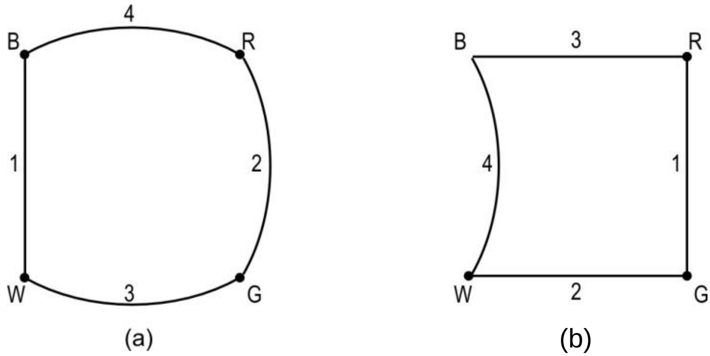


Gambar 2.13.
Subgraph atau Graph Bagian

Subgraph Disjoin Sisi: Dua (atau lebih) subgraph g_1 dan g_2 dari graph G disebut *disjoin sisi* jika g_1 dan g_2 tidak memiliki sisi sekutu. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.14 dan Gambar 2.15 berikut ini.



Gambar 2.14.

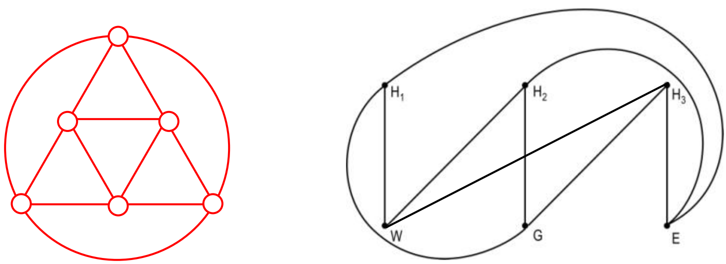


Gambar 2.15.

Gambar 2.15 (a) dan (b) merupakan dua subgraph dari Graph pada Gambar 2.14 yang disjoin sisi. Walaupun dua graph disjoin sisi tidak memiliki sisi yang bersekutu, akan tetapi kedua graph tersebut bisa memuat titik-titik yang sama. Dua subgraph yang tidak memiliki titik-titik persekutuan disebut *disjoin titik.*

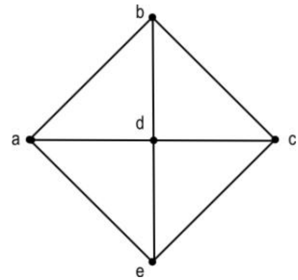
E. GRAPH TERATUR

Sebuah graph disebut *graph teratur* jika semua titiknya berderajat sama. Sebagai contoh, graph G pada Gambar 2.16 merupakan sebuah graph teratur.



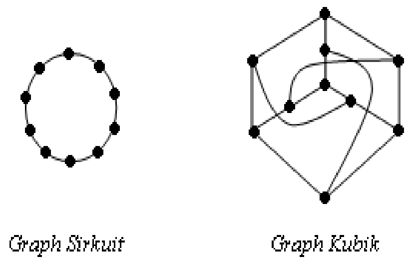
Gambar 2.16.

Sedangkan graph pada Gambar 2.17 bukan merupakan graph teratur karena tidak semua titik dalam graph tersebut berderajat sama.



Gambar 2.17.

Graph teratur berderajat 2 biasanya disebut *graph sirkuit*, sedangkan graph teratur berderajat 3 biasanya disebut *graph kubik* seperti diperlihatkan pada Gambar 2.18.

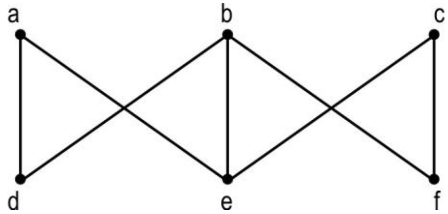


Gambar 2.18.

Mudah diperiksa bahwa setiap graph nol adalah graph teratur berderajat nol, dan graph lengkap K_n adalah graph teratur berderajat n – 1. Kiranya jelas komplemen graph teratur juga merupakan graph teratur.

F. GRAPH BIPARTIT

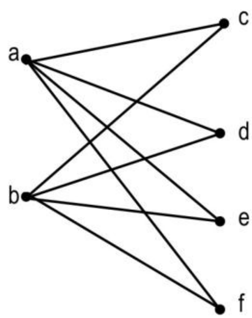
Sebuah graph disebut *graph bipartit* jika graph tersebut memuat titik-titik yang dapat dibagi menjadi dua himpunan sedemikian hingga tidak ada sisi-sisi yang menghubungkan titik-titik pada himpunan yang sama. Graph bipartit ini dilambangkan dengan $G(V_1, V_2, E)$. Perhatikan Gambar 2.19 sebagai contoh graph bipartit.



Gambar 2.19.

Jika sebuah graph lengkap titik-titiknya dapat dikelompokkan dalam 2 himpunan yang berbeda, demikian sehingga tiap titik pada himpunan yang satu ajasen dengan semua titik lain pada himpunan titik lainnya, maka graph tersebut dinamakan graph bipartit lengkap.

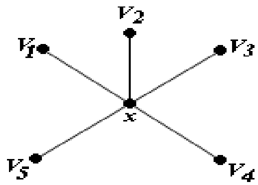
Sebuah graph bipartit lengkap dengan m dan n titik, dinotasikan $K_{m,n,}$ merupakan sebuah graph bipartit. Graph tersebut memuat satu himpunan dengan m titik dan himpunan lain dengan n titik, serta semua kemungkinan sisi yang bisa dibentuk antara tiap pasangan titik dalam kedua himpunan yang berbeda. Sebagai contoh perhatikan Gambar 2.20.



Gambar 2.20.

Dalam graph bipartit lengkap di atas, titik-titik $K_{2,4}$ terdiri dari 2 partisi. Partisi pertama memuat 2 titik, terletak di sebelah kiri. Antara satu titik dengan titik lainnya dalam partisi ini tidak terdapat sisi. Demikian pula dalam partisi kedua, yang terletak di sebelah kanan, terdapat 4 titik yang saling bebas, dalam arti tidak ajasen satu sama lain. Graph tersebut termasuk bipartit lengkap, karena semua titik pada partisi pertama ajasen dengan semua titik pada partisi kedua.

Khusus $K_{1,n}$ disebut *graph bintang*, misalnya $K_{1,5}$ diperlihatkan pada Gambar 2.21 dan dapat ditafsirkan sebagai jaringan komunikasi antar komputer dengan titik *x* berperan sebagai komputer induk/pelayan dan titik-titik lainnya sebagai terminal atau komputer yang dilayani.



Gambar 2.21.

Selain itu graph bipartit dapat digunakan sebagai model masalah penempatan tenaga kerja dengan titik-titik di V_1 sebanyak m buah ditafsirkan sebagai m lowongan jenis pekerjaan dan titik-titik di V_2 ditafsirkan sebagai n orang pelamar yang dapat menempati satu atau lebih lowongan ini. Sisi-sisi mewakili jenis-jenis lowongan pekerjaan yang dapat diisi oleh seorang pelamar sesuai dengan kemampuannya. Salah satu persoalannya ialah dapatkah setiap pelamar ini ditempatkan pada posisi yang sesuai dengan kemampuannya? Misalnya sebuah graph bipartit mencerminkan ada 3 lowongan pekerjaan dengan 4 pelamar, dan tafsirannya ialah pelamar pertama mempunyai kemampuan untuk menempati salah satu dari ketiga jenis pekerjaan, pelamar kedua dan ketiga mampu untuk jenis pekerjaan pertama dan ketiga, sedangkan pelamar keempat hanya mampu untuk jenis pekerjaan kedua. Penerimaan pegawai akan lebih obyektif apabila berpedoman pada nilai hasil seleksi kemampuan pelamar. Setiap nilai ini biasanya dicantumkan bersebelahan dengan sisinya yang sepadan dan dikenal sebagai bobot sisinya. Graph yang setiap sisinya mempunyai bobot disebut graph berbobot.

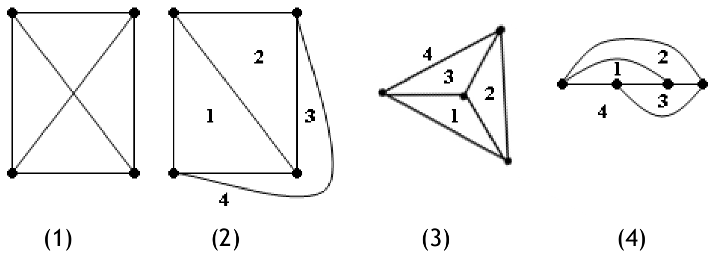
Salah satu contoh populer penggunaan graph bipartit ini ialah sebagai model bagi masalah “sarana”: ada tiga rumah, katakanlah R*1*, R*2*, dan R*3*, yang masing-masing akan dihubungkan dengan tiga macam “sarana” (Air minum, Gas, Listrik) dengan menggunakan pipa-pipa di bawah tanah.

G. GRAPH BIDANG DAN GRAPAH PLANAR

Dalam sajian geometrik suatu graph mungkin saja ada dua sisi atau lebih yang saling berpotongan bukan pada titik ujungnya. Apabila kita mampu menggambar kembali graph ini sehingga tidak ada sepasang sisi yang saling berpotongan selain pada kedua titiknya, maka graph ini mempunyai nama khas.

Jika pada sajian geometrik suatu graph ternyata setiap pasangan sisinya saling berpotongan hanya pada titik ujungnya, maka graph ini disebut *graph bidang*. Suatu graph G yang isomorfik dengan graph bidang disebut *graph planar*. Dalam hal lainnya G disebut *graph tak-planar*.

Kiranya jelas bahwa graph sirkuit merupakan graph planar. Contoh lainnya, misalnya graph lengkap K_4 yang sajian geometriknya diwakili oleh keempat graph pada Gambar 2.22 adalah graph planar, tetapi hanya graph kedua, ketiga, dan keempat yang merupakan graph bidang.



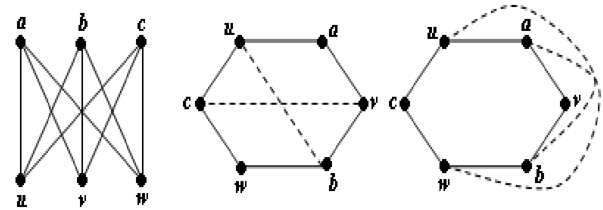
Gambar 2.22.

Dari setiap graph bidang pada Gambar 2.22 dapat diamati bahwa bidang datar tempat graph terbagi menjadi 4 daerah yang dinomori dari 1 sampai dengan 4. Daerah seperti ini disebut *muka*. Graph tersebut mempunyai 4 titik dan 6 sisi, dan memenuhi hubungan:
(*banyaknya titik*) – (*banyaknya sisi*) + (*banyaknya muka*) = 2.
Pada tahun 1750 hubungan ini telah diperlihatkan berlaku untuk sebarang graph bidang dan dikenal sebagai ***rumus Euler***.

Teorema 1
Pada graph bidang G = (V,E) dengan n titik, m sisi, dan f muka berlaku hubungan n – m + f = 2.

Contoh populer graph tak-planar ialah K_5 dan $K_{3,3}$. Oleh karena itu, pada system “sarana” tersebut di atas sudah dapat dipastikan ada sepasang pipa yang saling tumpang-tindih seperti dijelaskan berikut ini. Pada Gambar 2.23

tampak bahwa graph $K_{3,3}$ mengandung graph sirkuit, misalnya dengan rangkaian titik dan sisi seperti tampak pada Gambar 2.23.

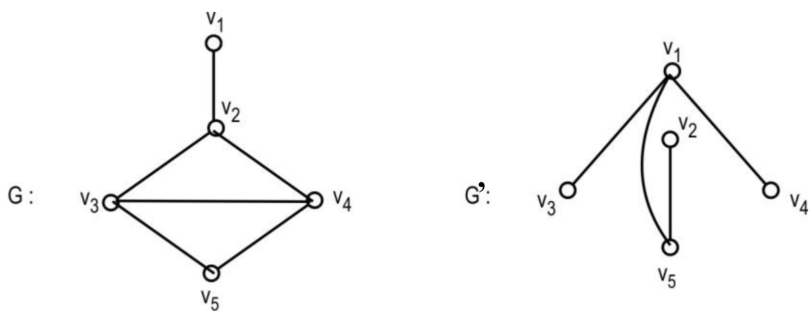


Gambar 2.23.

Sekarang kita harus menempatkan sisi-sisi ub, vc, dan wa. Dari Gambar 2.23 mudah dilihat bahwa hanya satu di antara ketiga sisi ini dapat digambar di dalam heksagon, karena dalam hal lainnya akan saling berpotongan. Dengan alasan serupa tampak bahwa hanya satu sisi saja yang dapat digambar di luar heksagon. Dengan demikian tidaklah mungkin menempatkan ketiga sisi tersebut tanpa menghasilkan titik potong, sehingga akibatnya $K_{3,3}$ bukan graph planar.

H. GRAPH KOMPLEMEN

Komplemen dari sebuah graph G, dinotasikan G', adalah sebuah graph dengan himpunan titik yang sama seperti dalam G dan dengan sifat bahwa dua titik dari G' ajasen jika dan hanya jika dua titik yang sama dalam G tidak ajasen. Gambar 2.24 memuat contoh dua graph yang saling berkomplemen.



Gambar 2.24.

Jika G merupakan graph dengan n titik, maka komplemen graph G dapat dikonstruksi melalui K_n dengan cara menghapus semua sisi yang ada di G seperti pada Gambar 2.24. Jelas bahwa komplemen graph lengkap K_n ialah graph nol dan demikian pula sebaliknya.

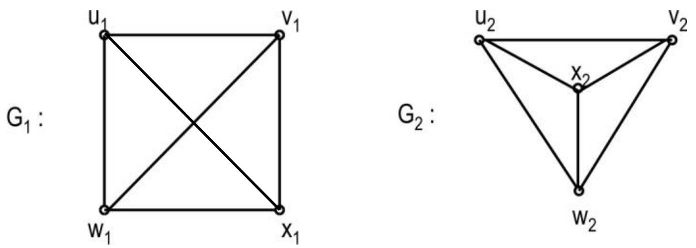
I. GRAPH ISOMORFIK

Dalam setiap bidang matematika, penting sekali untuk mengetahui apakah dua objek yang sedang kita hadapi itu sama atau berbeda. Sebagai contoh, bilangan dua dan $\frac{6}{3}$ dapat dipandang sebagai dua bilangan yang sama, walaupun secara tepatnya dua bilangan tersebut tidak identik. Sekarang kita akan menentukan syarat-syarat apakah yang harus dipenuhi agar dua buah graph dapat dikatakan "sama". Hal penting yang diketahui pada kesamaan ini terletak pada fakta bahwa apabila G_1 dan G_2 merupakan dua graph yang sama yang diperoleh dari dua situasi berbeda, maka dapat dipastikan bahwa antara dua situasi tersebut terdapat suatu kesamaan mendasar.

Secara intuitif, dua graph G_1 dan G_2 adalah sama jika salah satu dari dua graph tersebut, misalnya G_2 dapat digambar kembali, sedemikian hingga G_2 identik dengan G_1.

Contoh

Salah satu dari graph di bawah ini dapat digambar kembali sedemikian hingga hasilnya identik dengan graph lainnya.



Gambar 2.25.

Kesamaan dua graph selanjutnya akan disebut sebagai *graph isomorfik* yang akan kita definisikan secara lebih formal. Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua buah graph. Isomorfisma dari G_1 ke G_2 diartikan sebagai suatu pemetaan satu-satu j: $V(G_1)$ pada $V(G_2)$ sedemikian hingga dua titik u_1 dan v_1

berbatasan dalam G_1 jika dan hanya jika titik-titik $j(u_1)$ dan $j\ (v_1)$ berbatasan dalam G_2. Jika j isomorfisma, maka G_1 dan G_2 disebut isomorfik, dan pemetaan balikan j^{-1} dari $V(G_2)$ ke $V(G_1)$ juga merupakan isomorfisma, G_2 isomorfik dengan G_1. Teorema berikut memuat sifat penting dari isomorfisma.

Teorema 2

Relasi *isomorfik dengan* merupakan relasi ekivalen pada himpunan semua graph.

Bukti

Sifat refleksif jelas dipenuhi oleh relasi *isomorfik dengan*. Selanjutnya kita harus memperlihatkan bahwa jika G sebuah graph dan pemetaan: $j\ \ V(G) \rightarrow V(G)$ didefinisikan dengan $j\ \ (v) = v$ untuk setiap v Î $V(G)$, maka j adalah isomorfisma dari G ke G.

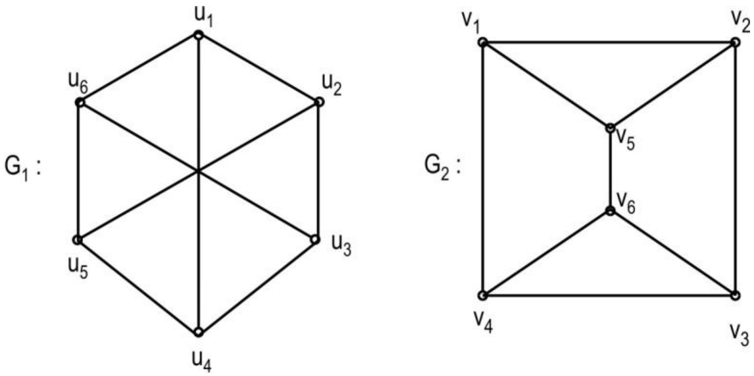
Misalkan G_1 isomorfik dengan G_2; dengan demikian j adalah suatu isomorfisma dari G_1 ke G_2. Definisikan pemetaan balikan $j^{-1}: V(G_2) \rightarrow V(G_1)$ dengan $j^{-1}(v_2) = v_1$ jika $j\ \ (v_1) = v_2$. Jelas bahwa j^{-1} merupakan pemetaan satu-satu dari $V(G_2)$ pada $V(G_1)$. Misalkan u_2 , v_2 Î $V(G_2)$, $j^{-1}(u_2) = u_1$ dan $j\ \ (v_1) = v_2$. Maka $j\ (u_1) = u_2$ dan $j\ (v_1) = v_2$. Dari dua persamaan terakhir ini diperoleh bahwa u_2 dan v_2 adalah dua titik yang berbatasan jika dan hanya jika $j\ (u_1)$ dan $j\ (v_1)$ berbatasan, dan karena G_1 isomorfik dengan G_2, maka $j\ (u_1)$ dan $j\ (u_2)$ berbatasan jika dan hanya jika $u_1 = j^{-1}(u_2)$ dan $v_1 = j^{-1}(v_2)$ berbatasan. Dengan demikian u_2 dan v_2 merupakan dua titik yang berbatasan jika dan hanya jika $j^{-1}(u_2)$ dan $j^{-1}(v_2)$ berbatasan. Hal ini menunjukkan bahwa G_2 isomorfik dengan G_1; dengan kata lain relasi *isomorfik dengan* merupakan sebuah relasi simetris.

Selanjutnya kita harus memperlihatkan bahwa relasi tersebut merupakan relasi transitif. Misalkan G_1 isomorfik dengan G_2 dan G_2 isomorfik dengan G_3. Dengan demikian terdapat isomorfisma $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ dan $g : V(G_2) \rightarrow V(G_3)$.

Pandang fungsi komposit gof. Dapat diperlihatkan bahwa gof merupakan pemetaan satu-satu dari $V(G_1)$ pada $V(G_3)$. Misalkan u_1 , v_1 Î $V(G_1)$. Misalkan pula $f(u_1) = u_2$ dan $f(v_1) = v_2$, $g(u_2) = u_3$ dan $g(v_2) = v_3$. Karena f dan g isomorfisma, maka u_1 dan v_1 berbatasan jika dan hanya jika $f(u_1) = u_2$ dan $f(v_1) = v_2$ berbatasan, juga u_2 dan v_2 berbatasan jika dan hanya jika $g\ (u_2) = u_3$

dan g (v_2) = v_3 berbatasan. Jadi, u_1 dan v_1 berbatasan jika dan hanya jika u_3 = (gof)(u_1) dan v_3 = (gof) (v_1) berbatasan. Hal ini menunjukkan bahwa gof adalah isomorfisma. Dengan demikian G_1 isomorfik dengan G_3.

Jika G_1 dan G_2 graph isomorfik, maka terdapat pemetaan satu-satu j dari $V(G_1)$ pada $V(G_2)$. Akibatnya $V(G_1)$ dan $V(G_2)$ memiliki elemen yang sama banyaknya, atau G_1 dan G_2 berorde sama. Misalkan u_1 dan v_1 dua titik dari G_1 dan misalkan pula bahwa j (u_1) = u_2 dan j (v_1) = v_2. Maka u_1 dan u_1 berbatasan dalam G_1 jika dan hanya jika u_2v_2 merupakan sebuah sisi dari G_2. Hal ini menyimpulkan bahwa G_1 dan G_2 berukuran sama. Kita tahu bahwa dua graph yang orde dan ukurannya sama, belum tentu isomorfik. Sebagai contoh perhatikan dua graph pada Gambar 2.26. Dua graph tersebut masing-masing berorde enam dan ukurannya sembilan, akan tetapi tidak isomorfik.



Gambar 2.26.

Nampaknya sulit untuk memperlihatkan bahwa graph G_1 dan G_2 pada Gambar 2.26 di atas adalah tidak isomorfik, karena kita harus meneliti setiap pemetaan satu-satu dari $V(G_1)$ pada $V(G_2)$ atau dari $V(G_2)$ pada $V(G_1)$ gagal untuk diperlihatkan sebagai suatu isomorfisma. Namun demikian kita dapat menyederhanakan masalah tersebut dengan cara sebagai berikut. Pandang suatu pemetaan satu-satu j j dari $V(G_1)$ pada $V(G_2)$.

Titik-titik v_1, v_2, dan v_5 dari G_2 merupakan tiga titik yang saling berbatasan. Dengan demikian j seharusnya memetakan tiga titik dalam G_1 ke dalam v_1, v_2, dan v_5. Jika j suatu isomorfisma, maka dua titik dari G_1 adalah berbatasan jika dan hanya jika dua titik bayangan dari G_2 di bawah j juga berbatasan. Akibatnya tiga titik dari G_1 yang bayangannya v_1, v_2, dan v_5

juga harus merupakan tiga titik yang saling berbatasan. Akan tetapi G_1 tidak memuat tiga titik yang saling berbatasan. Dengan demikian antara $V(G_1)$ dan $V(G_2)$ tidak ada suatu isomorfisma, atau G_1 tidak isomorfik dengan G_2.

Teorema 3

Jika G_1 dan G_2 merupakan graph isomorfik, maka derajat titik-titik dari G_1 secara tepat merupakan derajat titik-titik dari G_2.

Bukti

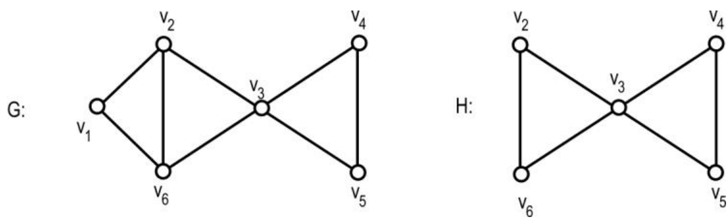
Karena G_1 dan G_2 isomorfik, maka terdapat suatu isomorfisma *j* = $V(G_1) \rightarrow V(G_2)$. Misalkan u suatu titik sembarang dari G_1 dan misalkan deg u = n. Selanjutnya misalkan bayangan u dalam G_2 adalah v, yaitu (u) = v. Akan ditunjukkan bahwa deg v = n.

Karena deg u = n, maka G_1 memuat titik-titik u_1, u_2, ... u_n yang berbatasan dengan u. Misalkan *j* $(u_i) = v_i$ untuk i = 1, 2, ... n, Maka v berbatasan dengan tiap titik v_1, v_2, ... v_n, karena u merupakan suatu isomorfisma. Titik-titik tersebut yaitu v_1, v_2, ... v_n, merupakan titik-titik yang berbatasan dengan v, karena u berbatasan dengan x dalam G_1 jika dan hanya jika v berbatasan dengan x dalam G_2. Jadi deg v = n.

J. GRAPH TERHUBUNG

Himpunan graph terhubung merupakan suatu himpunan yang sangat penting untuk diketahui. Pada bagian ini kita akan membahas graph terhubung dengan konsep-konsep yang berkaitan.

Misalkan G sebuah graph. Sebuah graph H adalah subgraph dari G jika V(H) Í V(G) dan E(H) Í E(G). Jika suatu graph F isomorfik dengan subgraph H, maka F juga disebut subgraph dari G. Perhatikan Gambar 2.27 sebagai contoh graph G dengan sebuah subgraph H.



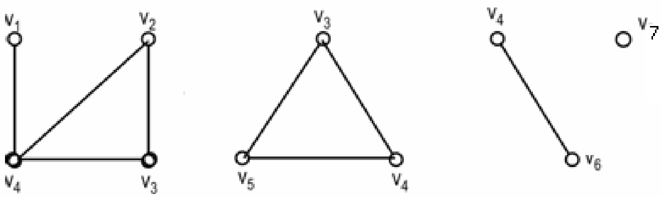
Gambar 2.27.

Misalkan u dan v adalah titik-titik dari graph. *Perjalanan* u-v. dalam G adalah suatu deretan titik-titik dan sisi-sisi dari G yang dimulai di titik u dan berakhir di titik v sedemikian hingga tiap sisi menghubungkan titik-titik dari G. Sebagai contoh, v_3, v_3v_2, v_2, v_2v_6, v_6, v_6v_3, v_3, v_3v_4, v_4, v_4v_5, v_5, v_5v_4, v_4 adalah sebuah perjalanan v_3 - v_4 dalam graph G (Gambar 2.27). Teliti bahwa dalam perjalanan tersebut sisi v_4v_5 muncul sebanyak dua kali. Untuk memudahkan dalam penulisan, sebuah perjalanan cukup dinyatakan dengan mendaftar titik-titiknya, karena sisi-sisinya dapat dengan jelas diketahui. Dengan demikian contoh perjalanan v_3 - v_4 dapat disederhanakan penulisannya menjadi v_3, v_2, v_6, v_3, v_4, v_5, v_4.

Sebuah *penelusuran* u-v dalam suatu graph adalah perjalanan u-v dengan tidak ada satu sisipun yang diulang. Perjalanan v_3 - v_4 yang kita bicarakan di atas jelas bukan merupakan penelusuran, sebab ada sisi yang diulang dua kali; sedangkan v_3, v_2, v_6, v_3, v_4 dalam graph G gambar 2.27 adalah sebuah perjalanan v_3 - v_4 yang merupakan penelusuran. Lintasan u-v adalah sebuah perjalanan u-v atau penelusuran, dengan tidak ada satu pun titik yang diulang. Dalam graph gambar 2.27, v_3, v_5, v_4 merupakan sebuah contoh lintasan v_3 - v_4.

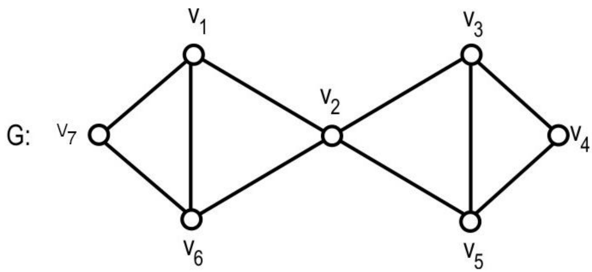
Dua titik u dan v dalam sebuah graph G disebut *terhubung* jika u = v, atau jika u ^{1} v dan lintasan u - v ada dalam G. Jika setiap dua titik dari G terhubung, maka G disebut graph *terhubung*; dan jika sebaliknya disebut *tak terhubung* atau *tidak terhubung*.

Sebuah subgraph terhubung H dari G disebut *komponen* dari G jika termuat dalam subgraph terhubung lain dari G yang memiliki titik atau sisi lebih banyak dari H. Sebagai contoh perhatikan graph pada Gambar 2.28. Graph tersebut memiliki empat komponen. Jika sebuah graph hanya memiliki satu komponen, maka graph tersebut adalah graph terhubung.



Gambar 2.28.

Dalam sebuah penelusuran u-v yang memuat paling sedikit tiga titik, jika u = v, maka penelusuran itu disebut *sirkuit*. Dengan kata lain, dalam sebuah sirkuit, titik berangkat dan titik akhirnya adalah sama. Sebuah sirkuit dengan tidak ada satu pun titik yang diulang (kecuali titik berangkat dan titik akhir) disebut *sikel*. Sebagai contoh, dalam graph Gambar 2.29, v_1, v_2, v_3, v_5, v_2, v_6, v_1 adalah sebuah sirkuit yang tidak merupakan sikel; sedangkan v_2, v_3, v_4, v_5, v_2 adalah sebuah sikel.



Gambar 2.29.

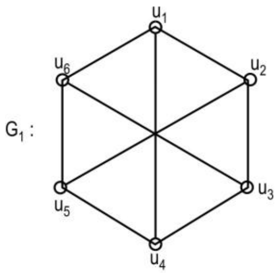
Menurut definisi, sebuah penelusuran adalah suatu deretan titik dan sisi, walaupun sudah kita sepakati bahwa sebuah penelusuran dinyatakan sebagai deretan titik. Himpunan titik dan sisi yang menentukan suatu penelusuran, menghasilkan sebuah subgraph. Subgraph seperti ini sering kali disebut sebagai penelusuran. Sebagai contoh v_1, v_2, v_5, v_3, v_2, v_6 dalam graph G Gambar 2.29 merupakan sebuah penelusuran. Jika subgraph H dari G didefinisikan V (H) = { v_1, v_2, v_5, v_3, v_6 } dan E (H) = { v_1 v_2, v_2 v_5, v_5 v_3, v_3 v_2, v_2 v_6 }, maka H juga disebut sebagai suatu penelusuran dalam G.

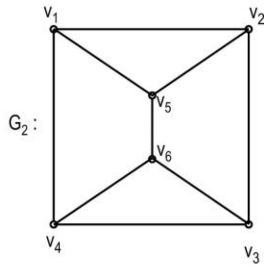
LATIHAN

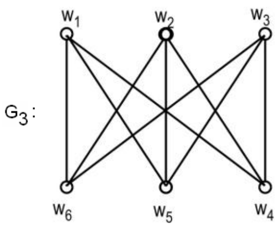
Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Sebuah graph yang tidak memiliki loop dan sisi paralel disebut ....
2) Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graph sederhana. Jika tiap pasangan titik v_i , v_j terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya, maka G disebut ....

3) Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graph dan H = (V_1, E_1) adalah sebuah graph bagian dari G, maka V_1 merupakan himpunan bagian dari .... dan E_1 merupakan himpunan bagian dari ....
4) Jika semua titik dari suatu graph berderajat sama, maka graph tersebut disebut graph ....
5) Jika sebuah graph memuat titik-titik yang dapat di dekomposisi menjadi dua himpunan sedemikian hingga tidak ada sisi-sisi yang menghubungkan titik-titik pada himpunan yang sama disebut graph ....
6) Misalkan G = (V_1, E_1) dan H = (V_2, E_2). Jika V_1 = V_2 dan dua titik dalam G ajasen jika dan hanya jika dua titik yang sama dalam H tidak ajasen, maka G disebut .... dari H.
7) Berikan contoh sebuah graph tidak terhubung terdiri atas empat komponen yang masing-masing merupakan graph lengkap!
8) Dari tiga graph di bawah ini, tunjukkan dua graph yang isomorfik.



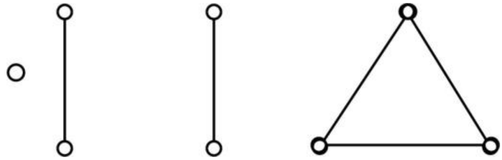




Petunjuk Jawaban Latihan

1) Graph sederhana.
2) Graph lengkap.
3) V_1 merupakan himpunan bagian dari V dan E_1 himpunan bagian dari E.
4) Graph teratur.
5) Graph bipartit.
6) Komplemen.

7)



8) G_2 dan G_3

RANGKUMAN

1. Sebuah graph yang tidak memiliki loop dan sisi paralel disebut graph sederhana.
2. Misalkan G adalah sebuah graph sederhana. Jika tiap pasangan titik v_i , v_j terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya, maka G disebut graph lengkap.
3. Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graph dan H = (V_1, E_1) adalah sebuah graph bagian dari G, maka V_1 merupakan himpunan bagian dari V dan E_1 merupakan himpunan bagian dari E.
4. Jika semua titik dari suatu graph berderajat sama, maka graph tersebut graph teratur.
5. Jika sebuah graph memuat titik-titik yang dapat di dekomposisi menjadi dua himpunan sedemikian hingga tidak ada sisi-sisi yang menghubungkan titik-titik pada himpunan yang sama disebut graph bipartit.
6. Misalkan G = (V_1, E_1) dan H = (V_2, E_2). Jika V_1 = V_2 dan dua titik dalam G ajasen jika dan hanya jika dua titik yang sama dalam H tidak ajasen, maka G disebut komplemen dari H.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graph sederhana. Maka G memiliki sifat ....
   A. memuat loop dan sisi paralel
   B. tidak memuat loop dan sisi paralel

C. memuat loop tapi tidak memuat sisi paralel
D. tidak memuat loop tapi memuat sisi paralel

2) Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graph lengkap dengan 5 titik. Banyaknya sisi yang dimuat G adalah ....
A. 20 buah
B. 5 buah
C. 10 buah
D. 15 buah

3) Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graph lengkap dengan n titik. Jika v adalah sebuah titik dalam G, maka deg (v) = ...
A. n
B. n (n - 1)
C. $\frac{n(n-1)}{2}$
D. n - 1

4) Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graph serta V_1 dan E_1 adalah himpunan bagian dari V dan E. Maka graph H = (V_1, E_1) disebut graph ....
A. bagian dari G
B. komplemen
C. bipartit
D. bagian dari V dan E

5) Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graph teratur. Jika v_i dan v_j adalah anggota dari V, maka deg (v_i) ....
A. tidak sama dengan deg (v_j)
B. mungkin sama dengan deg (v_j)
C. sama dengan deg (v_j)
D. tidak mungkin sama dengan deg (v_j)

6) Jika setiap titik dari graph berderajat sama, maka graph tersebut disebut graph ....
A. lengkap
B. teratur
C. sederhana
D. bipartit

7) Jika dalam sebuah graph himpunan titiknya dapat di dekomposisi menjadi dua himpunan sedemikian hingga tidak ada sisi-sisi yang menghubungkan titik-titik pada himpunan yang sama, maka graph tersebut adalah graph ....
   A. teratur
   B. sederhana
   C. lengkap
   D. bipartit

8) Misalkan G (V_1, E_1) dan H = (V_2, E_2) adalah dua buah graph. Jika V_1 = V_2 dan dua titik dalam G ajasen jika dan hanya jika dua titik tersebut dalam H tidak ajasen maka pernyataan yang benar adalah ....
   A. G merupakan komplemen dari H
   B. G merupakan bagian dari H
   C. H merupakan bagian dari G
   D. H dan G adalah dua graph yang saling lepas

9) Graph bipartit lengkap dinotasikan $K_{m,n}$ dengan m dan n adalah bilangan titik di dalam kedua himpunan itu. Jika $K_{1,2}$ memiliki 3 titik dan 2 sisi, sedangkan $K_{2,3}$ memiliki 5 titik dan 6 sisi, maka banyak titik dan sisi dari $K_{m,n}$ = ….
   A. n + 1 dan m x 1
   B. m x n dan m + n
   C. m + n dan m x n
   D. m x n + 1 dan m + n + 1

10) Banyaknya sisi dan titik dari $K_{5,6}$ adalah …
   A. 11 buah dan 30 buah
   B. 30 buah dan 11 buah
   C. 30 buah dan 15 buah
   D. 15 buah dan 30 buah

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) D. Banyaknya titik dari G adalah 3.
2) C. Bisa dicek melalui gambarnya.
3) D. Karena G memuat titik yang berbatasan dengan semua.
4) B. Bisa dicek melalui gambarnya.
5) A. Ubah dulu menjadi matriks ajasensi.
6) A. Ubah dulu menjadi matriks ajasensi.
7) C. Ubah dulu menjadi graph.
8) B. Ubah dulu menjadi graph.
9) C. Cari dulu matriks insidensinya.
10) A. Cari dulu matriks insidensinya.

Tes Formatif 2

1) B. Lihat definisi graph sederhana.
2) C. Gunakan rumus $\frac{n(n-1)}{2}$.
3) D. G adalah graph lengkap.
4) A. Lihat definisi graph bagian.
5) C. Karena G graph teratur maka derajat titiknya sama.
6) B. Lihat definisinya.

7) D. Lihat definisi graph bipartit.
8) A. Lihat definisi graph komplemen.
9) C. Rumus $K_{m,n}$
10) B. Lihat rumus $K_{m,n}$

Daftar Pustaka

Bradley, J. (1988). *Introduction to Discrete Mathematics*. New York: Addison Wesley.

Buckley, F. & Lewinter, M. (2003). *A Friendly Introduction to Graph Theory*. New York: Pearson Education, Inc.

Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. New York: Dover Publications.

Deo, N. (1989). *Graphh Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. New Delhi: Prentice-Hall.

Suryadi, D. (1996). *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Sutarno, H., Priatna, N., & Nurjanah (2005). *Matematika Diskrit*. Malang: UM Press.

Witala, S.A. (1987). *Discrete Mathematics*. New York: McGraw-Hill.

Glosarium

Disjoin Sisi
Dua (atau lebih) subgraph g_1 dan g_2 dari graph G yang tidak memiliki sisi sekutu.

Disjoin Titik
Dua subgraph yang tidak memiliki titik-titik persekutuan.

Graph Bagian
Suatu graph yang setiap titiknya merupakan titik dari graph semula dan setiap sisinya adalah sisi dari graph semula juga.

Graph Bipartit
Suatu graph yang memuat titik-titik yang dapat dibagi menjadi dua himpunan sedemikian hingga tidak ada sisi-sisi yang menghubungkan titik-titik pada himpunan yang sama.

Graph Isomorfik
Dua buah graph yang memiliki kesamaan jika setiap titik yang bersesuaian memiliki derajat yang sama.

Graph Komplemen
Sebuah graph dengan himpunan titik yang sama seperti dalam G dan dengan sifat bahwa dua titik dari G ajasen jika dan hanya jika dua titik yang sama dalam G tidak ajasen.

Graph Lengkap
Suatu graph sederhana dengan tiap pasangan titik v_i, v_j terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya.

Graph Sederhana
Sebuah graph yang tidak memiliki loop dan sisi paralel.

Graph Teratur
Sebuah graph yang semua titiknya berderajat sama.

Graph Terhubung
Sebuah graph yang hanya memiliki satu komponen

Matrik Insidensi

Sebuah matriks $A = \left[a_{ij}\right]$ berordo $n \times e$ dengan n menyatakan baris dan e menyatakan kolom jika

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika sisi } ke - j\ e_j \text{ insiden dengan titik V} \\ 0, & \text{jika sebaliknya} \end{cases}$$

Matriks Ajasensi

Sebuah matriks $X = \left[x_{ij}\right]$ berordo $n \times n$ yang didefinisikan pada ring bilangan bulat sedemikian hingga

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika terdapat sebuah sisi antara titik ke-}\ i \text{ dan titik ke-}\ j \\ 0, & \text{jika tidak ada satu sisipun antara kedua titik tersebut} \end{cases}$$

Matriks Biner

Sebuah matriks insidensi yang hanya memuat dua kemungkinan elemen yaitu 0 dan 1.

Orde

Banyaknya titik dalam graph G.

Penelusuran

Suatu deretan titik dan sisi.

Sikel

Sebuah sirkuit dengan tidak ada satupun titik yang diulang (kecuali titik berangkat dan titik akhir).

Sirkuit

Sebuah penelusuran $u - v$ yang memuat paling sedikit tiga titik dan jika $u = v$.

Ukuran

Banyaknya sisi dalam graph G.