BAB I PENGINTEGRALAN KOMPLEKS

1.1 **Integral Garis**

Sebelum membicarakan integral garis, terlebih dahulu akan dibahas kurva, kurva mulus, lintasan, dan orientasi suatu lintasan.

Lintasan

Kurva (lengkungan) *C* di bidang datar dapat dinyatakan dalam bentuk parameter, yaitu:

dengan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$, $a \le t \le b$,

x dan *y* kontinu pada [*a,b*]. Kurva *C* disebut kurva mulus, jika *x'* dan *y'* kontinu pada selang tertutup [*a,b*].

DEFINISI 1.1.1:

Fungsi f: [a,b] $\rightarrow$ **R** *disebut kontinu bagian demi bagian, jika terdapat partisi P =* {$x0, x1, x2, \ldots, xn$} *dari selang [a,b] sehingga f kontinu pada selang terbuka (xi,xi-1), i=1,2,3,…,n*

Berdasarkan definisi tersebut, kurva C disebut kurva mulus bagian demi bagian jika di dalam $x = x(t)$ *dan* $y = y(t)$, $a \le t \le b$ *berlaku x' dan y' kontinu bagian demi bagian pada [a,b]. Kurva mulus bagian demi bagian disebut lintasan.*

Pada kurva C dengan $x = x(t)$ *dan* $y = y(t)$, $a \le t \le b$, *titik (x(a),y(a)) disebut titik pangkal kurva C dan (x(b),y(b)) disebut titik ujung kurva C.*

Kurva *C* disebut tertutup sederhana, jika berlaku:

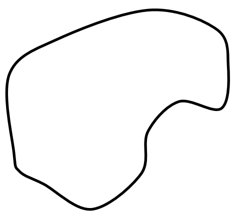
(i) $(x(t1),y(t1)) \neq (x(t2),y(t2))$ untuk setiap $t1,\ t2 \in (a,b)$

(ii) $(x(a).y(a)) = (x(b),y(b))$

Kurva tertutup sederhana Kurva tertutup tak sederhana

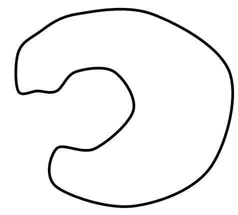
DEFINISI 5.1.2:

Suatu lintasan tertutup sederhana C disebut berorientasi positif jika C ditelusuri dari titik awal ke titik akhir maka interiornya terletak di sebelah kiri C, sebaliknya berorientasi negatif.



C

Berorientasi positif



C

Berorientasi negatif

Integral Garis

Misalkan y, $a \leq t \leq b$ adalah kurva mulus dan *M* permukaan terbatas yaitu paling sedikit terdefinisi pada kurva *C.*

Kontruksi integral garis .

(1) Buatlah partisi Δ untuk selang [*a*,*b*] dengan titik pembagian selang bagian ke-I dari partisi Δ adalah [*ti-1,ti*] dan panjang partisinya dengan = *maks* $\Delta ti,\ 1 \leq i \leq n$

(2) Kurva *C* terbagi atas *n* bagian yaitu *P0P1, P1P2, …, Pi-1Pi, …, Pn-1Pn*

(3) Pilih $Pi^* = (ci,di) \in Pi\text{-}1Pi$, $i = 1,2,3,\ldots,n$

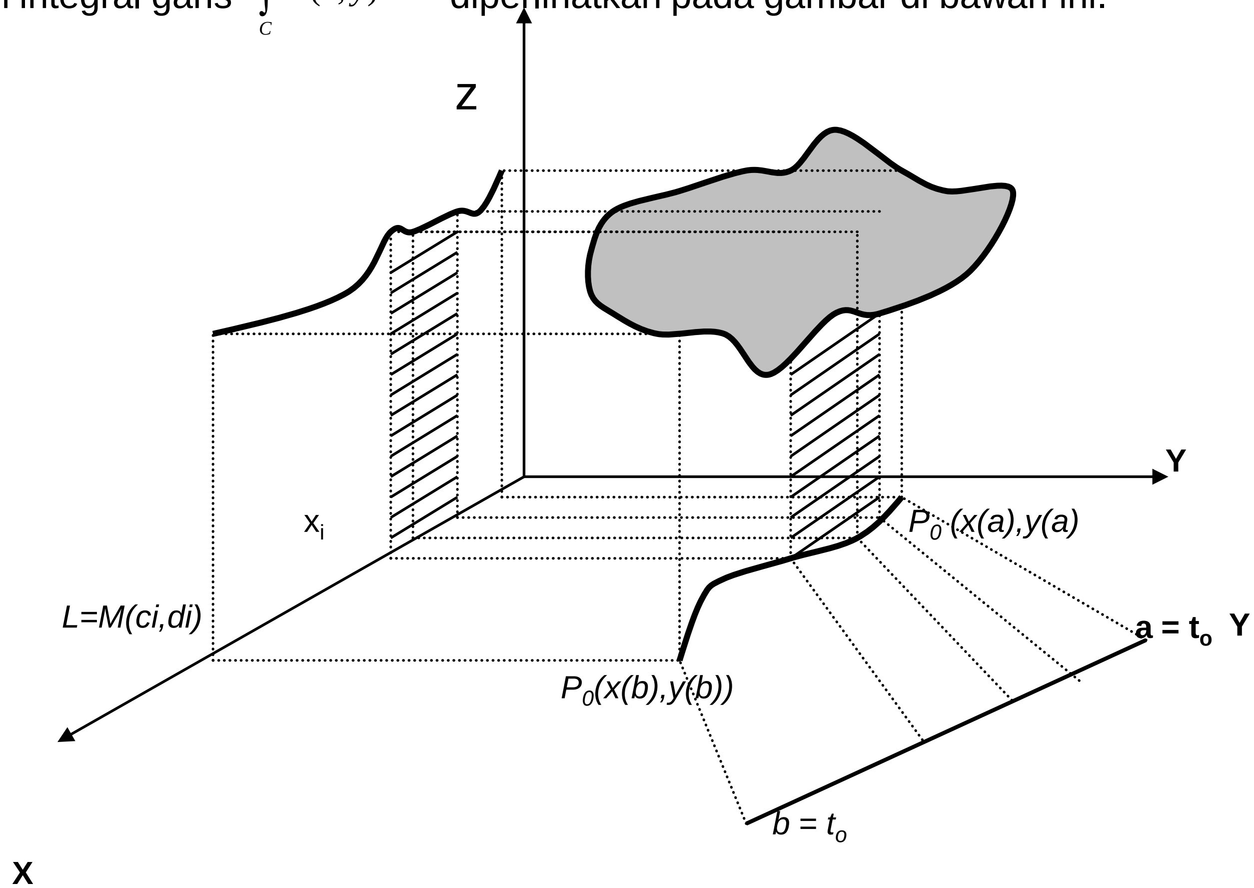
(4)Didefinisikan jumlah $\sum_{i=1}^{n} M(c_i, d_i)\Delta x_i$, $\Delta xi = xi – xi\text{-}1$ dimana *xi* absis *Pi* dan *xi-1* absis *Pi-1*, *i = 1,2,3,…,n*

(5) Tentukan $\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} M(c_i, d_i)\Delta x_i$

Jika limit ini ada, maka *M* terintegralkan pada *C.* Dalam kasus *M* terintegralkan pada *C,* integral garis dari *M(x,y)* pada *C* didefionisikan dengan

$$\int_C M(x,y)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} M(c_i, d_i)\Delta x_i$$

Secara geometri integral garis $\int_C M(x,y)dx$ diperlihatkan pada gambar di bawah ini.



$\int_C M(x,y)dx$ artinya proyeksi daerah di bawah permukaan *z = M(x,y)* dan di atas kurva *C* pada bidang *XOY* yang menghasilkan daerah di atas sumbu *X.*

DEFINISI 5.1.3:

Diberikan kurva mulus $C: \vec{F}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ *, a ≤ t ≤ b. Jika z = M(x,y) permukaan terbatas pada C, maka*

$$(a)\ \int_C M(x,y)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} M(x(t_i^*), x'(t_i^*))\Delta t_i$$

$$= \int_C \mathrm{M}(\mathrm{x}(\mathrm{t}),\ \mathrm{y}(\mathrm{t}))\mathrm{x}'(t)dt$$

$$(b)\int_C M(x,y)dy = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} M(x(t_i^*), y'(t_i^*))\Delta t_i$$

$$= \int_C M(x(t),y(t))y'(t)dt$$

$$\int_C M(x,y)dx$$

Apabila lintasan integral yang diberikan bukan dalam bentuk parameter, tetapi berbentuk y = f(x) dan x = g(y) dengan titik awal (a,b) dan titik akhir (c,d), maka dengan substitusi diperoleh*:*

(1) $\int_C M(x,y)dx = \int_a^c M(x, f(x))dx = \int_b^d M(g(y),y)g'(y)dy$

(2) $\int_C M(x,y)dy = \int_b^d M(g(y),y)dy = \int_a^c M(x, f(x))f'(y)dx$

Sifat-sifat dari $\int_C M(x,y)dx$

1. C tetap, integral M dipandang sebagai variabel

(a) Jika M kontinu dan C terbatas maka $\int_C M(x,y)dx$ *ada*

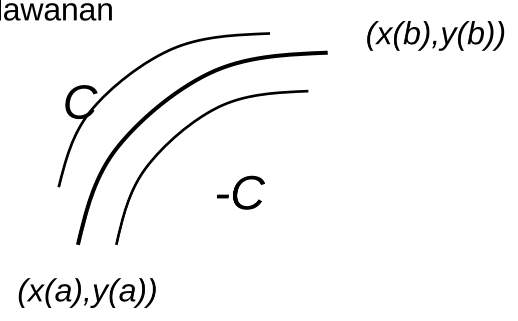
b. $\int_C [M(x,y)+N(x,y)]dx = \int_C M(x,y)dx + \int_C N(x,y)dx$

c. $\int_C kM(x,y)dx = k\int_C M(x,y)$, k $\in$ **R**

2. M tetap, *C* dipandang sebagai variabel.

Misalkan mulus $C:\ \vec{F}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$, $a \le t \le b$, maka

a. *(x(a),y(a))* titik pangkal dari *C* dan *(x(b),y(b))* titik ujung dari *C.* Perubahan *t* dari *a* ke *b* menghasilkan orientasi dari *C*. Perubahan *t* dari *b* ke *a*, akan diperoleh kurva yang sama dengan orientasi yang berlawanan



b. Jika $C_1:\ \vec{F}(t) = x_1(t)\vec{i} + y_1(t)\vec{j}$,$a_1 \le t \le b_1$ dan $C_2:\ \vec{F}(t) = x_2(t)\vec{i} + y_2(t)\vec{j}$,$a_2 \le t \le b_2$

dengan *(x_1 (b)$_1$,y_1 (b_1))=(x1(b1),y2(b1)),* maka *C = C1 + C2*.

Secara sama didefinisikan C = $\sum_{i=1}^{n} c_i$

C. $\int_{-C} M(x,y)dx = -\int_C M(x,y)dx$

d. $\int_{C_1+C_2} M(x,y)dx = \int_{C_1} M(x,y)dx + \int_{C_2} M(x,y)dx$

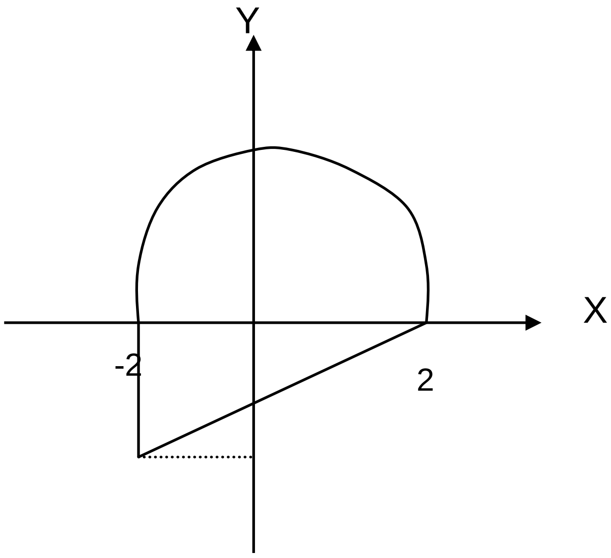
3. Jika *M* kontinu $|M(x,y)| \leq k$, untuk setiap *(x,y)* $\in$ *C, C* terbatas dan panjang $|C|$ kurva *C*, maka $\left|\int_C M(x,y)dx\right| \leq k.|C|$

Contoh:

Tentukan integral garis terhadap kedua peubah bagian fungsi *(x,y) = 2x + y2* sepanjang kurva *C = C1 + C2 + C3* dimana

C1: Busur lingkaran *x2 + y2 = 4* dengan orientasi negatif dari *(-2,0)* ke *(2,0)*
C2: Ruas garis lurus dari *(2,0)* ke *(-2,-2)*
C3: Ruas garis lurus dari *(-2,-2)* ke *(-2,0)*

Penyelesaian:



Dalam hal ini akan dihitung nilai dari $\int_C M(x,y)dy$ sedangakan $\int_C M(x,y)dx$ dipersilakan untuk anda coba sendiri.

$$\int_C M(x,y)dy = \int_C (2x+y^2)dy$$

$$= \int_{C_1}(2x+y^2)dy + \int_{C_2}(2x+y^2)dy + \int_{C_3}(2x+y^2)dy$$

dengan *C1: x2 + y2 = 4, x: –2 → 2.* Kurva *C1* dapat dinyatakan dalam bentuk parameter, yaitu

$$C_1 : \vec{F}(t) = 2\cos t\ \vec{i} - 2\sin t\ \vec{j}, \quad \pi \le t \le 2\pi$$

Sehingga diperoleh *x = 2 cos t* dan *y = -2 sin t.*

Dengan demikian diperoleh,

$$\int_{C_1}(2x+y^2)dy = \int_{\pi}^{2\pi}(4\cos t + 4\sin^2 t).(-2\cos t)dt$$

$$= -8\int_{\pi}^{2\pi}\cos^2 t dt\ \text{-}8\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2 t d(\sin t)$$

$$= -4\int_{\pi}^{2\pi}(1+\cos 2t)dt\ \text{-}8\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2 t d(\sin t)$$

$$= -4(t+\frac{1}{2}\sin t)\Big]_{\pi}^{2\pi} - \frac{8}{3}\sin^3 t\Big]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -4\pi$$

$C_2 : y = \frac{1}{2}x - 1,\ x : 2 \to -2,\ y : 0 \to -2$

Diperoleh:

$$\int_{C_2} M(x,y)dy = \int_0^{-2}(4(y+1)+y^2)dy = \int_0^{-2}(y+2)^2 d(y+2) = \frac{1}{3}(y+2)^3\Big]_0^{-2} = -2\frac{2}{3}$$

C3: x = -2, y : -2 $\rightarrow$ 0
Diperoleh,

$$\int_{C_3} M(x,y)dy = \int_{-2}^{o} (-4+y^2)dy \quad = (-4y+\frac{1}{3}y^3)\Big]_{-2}^{0} = -5\frac{1}{3}$$

Jadi, $\int_C (2x+y^2)dy = -\pi - 2\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3} = -4\pi - 8$

Arti dari $\int_C (2x+y^2)dy \ = -4\pi - 8$ adalah proyeksi daerah di bawah *z = 2x + y2* dan di atas *C* pada bidang *YOZ* yang menghasilkan daerah di bawah sumbu *Y.*

LATIHAN 5.1

1. Hitunglah $\int_C ydy + (x-y)dy$ *jika*

a. *C* adalah busur parabola *x = y2* dari *(0,0)* ke *(4,2)*
b. *C* adalah ruas garis lurus dari *(4,2)* ke *(0,0)*
c. *C* adalah ruas garis lurus dari *(0,0)* ke *(4,0)* dilanjutkan dari *(0,4)* ke *(4,2)*
d. *C* adalah busur parabola *2y + x2 = 5x* dari *(0,0)* ke *(4,2)*

2 Hitung nilai dari $\oint_C xdy + ydx$ *jika C adalah lingkaran* $x^2 + y^2 = 4$ *dengan orientasi positif.*

Kerjakan pula soal ini, jika C lingkaran $x^2 + y^2 = 2x$ *dengan orientasi nega*tif

3. Hitung nilai dari $\int_C (x+2y)dx + (y-2x)dy$ jika *C* adalah ellips $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ dengan orientasi positif. Kerjakan soal ini, jika *C* berorintasi negatif

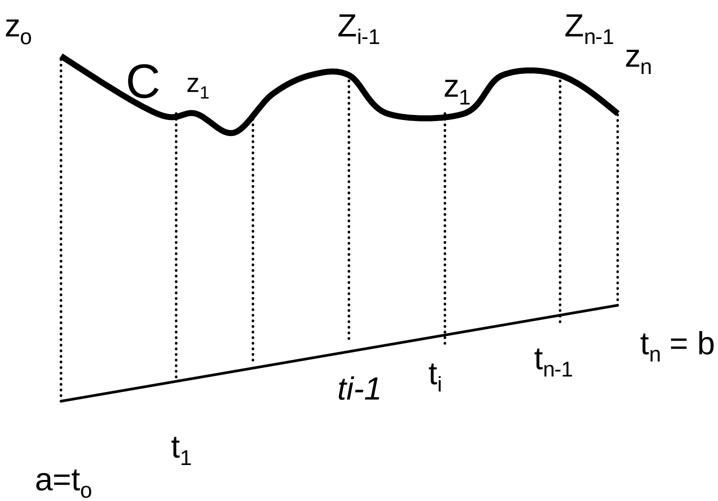
5.2 Pengintegralan Kompleks

Misalkan *C : z(t) = x(t) + iy(t), a* $\le t \le b$ adalah kurva mulus dan *w = f(z)* didefinisikan pada *C,* maka pengintegralan kompleks $\int_C f(z)dz$ dikontruksi sebagai berikut.

(1) Buatlah partisi Δ pada [*a,b*] dengan titik pembagian $a = t_O < t_1 < t_3 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b$

Selang bagian ke-I pada partisi Δ adalah [*ti-1,ti*] dan panjang partisinya adalah $\|\Delta\|$ dengan $\|\Delta\| = \underset{\le tt \le n}{maks}\Delta$. Situasi tersebut

diperlihatkan pada gambar berikut



(2) Kurva terbagi atas *n* bagian yaitu $z_o z_1$, z_1z_2, ..., $z_{i-1}z_i$, ..., $z_{n-1}z_n$ dengan $z_o = (x(a),y(a))$ dan $z_n = (x(b),y(b))$

(3) Pilih $c_i \in z_{i-1} z_i$, $1 \le i \le n$

(4) Definisikan jumlah $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta z_i$ dimana

(5) Tentukan $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta z_i$. Jika limit ini ada, maka *f* terintegralkan pada *C.*

(6) Dalam kasus *f* terintegralkan pada *C,* integral kompleks dari *f* pada *C* dinotasikan dengan $\int_C f(z)dz$ dimana $\int_C f(z)dz = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta z_i$

Contoh:

Tentukanlah integral berikut

a. $\int_C dz$

b. $\int_C z dz$

Penyelesaian:

$$\text{a. } \int_C dz = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta z, \; c_i \in z_{i-1}z_i$$

$$= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).(z_i - z_{i-1})$$

Misalkan *f(z) = 1*, maka *f(*c_i*) = 1* untuk setiap $c_i \in z_{i-1} z_i$.

Jadi, diperoleh

$$\int_C dz = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_{i-1})$$

$$= \lim_{\|\Delta\| \to 0} [(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots .(z_{n-1} - z_{n-2}) + (z_n - z_{n-1})]$$

$$= \lim_{\|\Delta\| \to 0} (z_n - z_{n-1})$$

$$= z_n - z_0 = z \Big]_{z_0}^{z_n}$$

b. $\int_C z\,dz = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta z,\ c_i \in z_{i-1}z_i$

$$= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).(z_i - z_{i-1})$$

Misalkan *f(z)* = *z*, maka *f*(c_i) = c_i . Diambil $c_i = z_{i-1}$. Jadi, diperoleh

$$\int_C z\,dz = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} z_{i-1}.(z_i - z_{i-1})$$

$$= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (z_{i-1}z_i - z_{i-1}{}^2) \text{ ....(1)}$$

Diambil $c_i = z_i$, maka

$$\int_C z\,dz = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} z_i.(z_i - z_{i-1})$$

$$= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (z_i{}^2 - z_i z_{i-1}) \text{ ....(2)}$$

Persamaan (1) + (2)diperoleh

$$2\int_C f(z)dz = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (z_i{}^2 - z_{i-1}{}^2)$$

$$= \lim_{\|\Delta\|\to 0} [(z_1{}^2 - z_0{}^2) + (z_2{}^2 - z_1{}^2) + \ldots + (z_{n-1}{}^2 - z_{n-2}{}^2) + (z_n{}^2 - z_{n-1}{}^2)]$$

$$= \lim_{\|\Delta\|\to 0} (z_n{}^2 - z_0{}^2)$$

$$= z_n{}^2 - z_0{}^2$$

Jadi, diperoleh bahwa $\int_C f(z)dz = \frac{1}{2}(z_n{}^2 - z_0{}^2) = \frac{1}{2}z^2\Big]_{z_0}^{z_n}$

TEOREMA 5.2.1 *(Eksistensi Integral Kompleks):*
Jika f(z) = u(x,y) +iv(x,y) kontinu pada setiap titik di suatu kurva mulus C, maka integral f sepanjang C ada dan

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - \int_C vdy + i(\int_C udy + \int_C vdx)$$

Pada teorema di atas, terdapat hal yang menarik untuk disimak bahwa jika *C* merupakan suatu unterval pada sumbu real, maka *f* pada *C* akan menjadi fungsi dari *x* saja. Dengan demikian adanya integral untuk fungsi *x* yang kontinu merupakan kasus khusus pada teorema di atas. Dalam pengertian tersebut suatu integral kompleks dapat dipandang sebagai perluasan dari integral real.

Penggunaan rumus pada Teorema 5.2.1 akan diilustrasikan melalui contoh-contoh, setelah disampaikan beberapa sifat dasar integral kompleks yang disajikan di bawah ini.

SIFAT-SIFAT $\int_C f(z)dz$:

1. *C* tetap, *f* dipandang sebagai variabel
   (a) Jika *f* kontinu dan *C* terbatas, maka $\int_C f(z)dz$ ada
   (b) Jika *f* dan *g* kontinu pada *C*, maka $\int_C (f+g)(z)dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$
   (c) Jika $\alpha \in C$ dan *f* kontinu pada *C*, maka $\int_C \alpha f(z)dz = \alpha\int_C f(z)dz$
2. Fungsi *f* tetap, *C* dipandang sebagai variabel
   (a) $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$
   (b) $\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$

3. Jika fungsi *f* kontinu pada *C*, *C* terbatas, untuk suatu M > 0 berlaku $\left|f(z)\right| \le M$ untuk setiap *z* pada *C* dan $|C|$ panjang *C*, maka $\left|\int_C f(z)dz\right| \le M.|C|$

Contoh:

Hitunglah $\int_C \bar{z}dz$ dengan

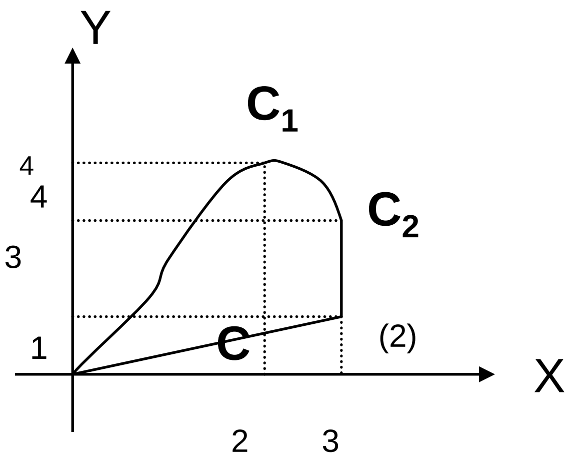
C_1 : $y = 4x - x2$; $x : 3 \to 0$, $y : 3 \to 4 \to 0$

C_2 : $y = x$; $x : 0 \to 3$, $y : 0 \to 1$

C_3 : $x = 3$; $y : 1 \to 3$

C = C1 + C2 + C3

Penyelesaian:



$$\int_C \bar{z}dz = \int_{C_1} \bar{z}dz + \int_{C2} \bar{z}dz + \int_{C3} \bar{z}d$$

(1) $$\int_{C_1} \bar{z}dz = \int_{C_1} (x-iy)(dx+idy = \int_{C_1} xdx + \int_{C_1} ydy + i(\int_{C_1} xdy - \int_{C_1} ydx)$$

$$= \int_3^0 xdx + (\int_3^4 ydy + \int_4^0 ydy) + i(\int_3^0 x(4-2x)dx - \int_3^0 (4x-x^2)dx)$$

$$= -4\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} + i(0+9)$$

$$= -9 + 9i$$

(2) $\int_{C_2} \bar{z}dz = \int_{C_2} xdx + \int_{C_2} ydy + i(\int_{C_2} xdy - \int_{C_2} ydx)$

$$= \int_0^3 xdx + \int_0^1 ydy + i(\int_0^3 \frac{1}{3} xdx - \int_0^3 \frac{1}{3} xdx)$$

$$= 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0$$

(3) $\int_{C_3} \bar{z}dz = \int_{C_3} xdx + \int_{C_3} ydy + i(\int_{C_3} xdy - \int_{C_3} ydx)$

$$= \int_3^3 xdx + \int_1^3 ydy + i(\int_1^3 3dy - \int_1^3 y.0)$$

$$= 0 + 4 + 6i$$

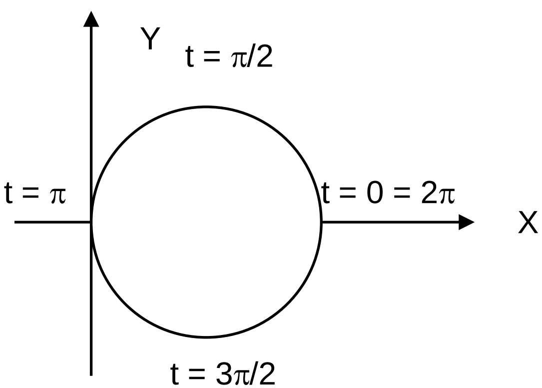
$$= 4 + 6i$$

Jadi, $\int_C \bar{z}dz = \int_{C_1} \bar{z}dz + \int_{C_2} \bar{z}dz + \int_{C_3} \bar{z}dz$ = (-9 + 9i) + 5 + (4 + 6i) = 15i

Contoh:

Misalkan *C :* $|z-1|$ = *1* dengan orientasi negatif. Hitunglah $\int_C \bar{z}dz$

Penyelesaian



a. $\int_C \bar{z}dz = \int_C (x-iy)(dx+idy) \quad = \int_C xdx + \int_C ydy + i(\int_C xdy + \int_C ydx)$

$C : |z-1| = 1$

$C : (x-1)^2 + y^2 = 1$

$C : \vec{F}(t) = (\cos t + 1)\vec{i} - \sin t\,\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\begin{cases} x = \cos t + 1, & 0 \le t \le 2\pi \\ y = -\sin t \end{cases}$$

Diperoleh,

$$\begin{aligned}
\int_C x\,dx &= \int_0^{2\pi} (cost+1)(-sin t\,dt) \\
&= \int_0^{2\pi} (cost+1)d(cost+1) \\
&= \frac{1}{2}(cost+1)^2 \Big]_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_C y\,dy &= \int_0^{2\pi} (-sin t)d((-sin t) \\
&= -\frac{1}{2} sin^2 t \Big]_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_C x\,dy &= \int_0^{2\pi} (cost+1)(-cost)dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos t)dt - \int_0^{2\pi} cos t dt \\
&= -\pi
\end{aligned}$$

$$\int_C y\,dx = \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t\right) dt$$

$$= \pi$$

Jadi, $\int_C \bar{z}\,dz = 0 + 0 + i(-\pi - (\pi)) = -2\pi i$

LATIHAN 5.2

1. Hitunglah $\int_C \bar{z}\,dz$, jika
   a. *C* adalah busur parabola *y = 1 – x2* dari *z = -2 – 3i* ke *z = i*
   b. *C* adalah ruas garis lurus dari *z = 0* ke *z = 2 + i*
   c. *C* adalah ruas garis lurus dari *z = 0* ke *z = -2i* dilanjutkan dari *z = 2i* ke *z = 2 + I*

2. Hitunglah $\int_C \bar{z}\,dz$, jika
   a. *C* adalah lingkaran $|z-1| = 1$ dengan orientasi positif

   b. *C* adalah persegi panjang dengan titik sudut *z = 0, z = 2i, z = 4 + 2i*, dan *z=4,* dengan orientasi *C* negatif

3. Hitunglah $\oint_C |z|\,dz$, jika

   a. *C* adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 29$ dengan orientasi pisitif

   b. *C* adalah bujursangkar dengan titik sudut *(0,0), (1,0), (1,1),* dan *(0,1)* dengan orientasi *C* negatif

Pengintegralan Cauchy

Pada pasal ini akan dibicarakan pengintegralan dari fungsi yang analitik dengan daerah integrasi suatu lintasan tertutup sederhana. Pengintegralan dari fungsi analitik tersebut disajikan dalam teorema Cauchy Goursat. Sebelum membicarakan teorema Cauchy Goursat, didahului dengan teorema Cauchy yang merupakana dasar lahirnya teorema Cauchy Goursat tersebut.

TEOREMA 5.3.1 (Teorema Cauchy):

Diberikan daerah terhubung sederhana D dan lintasan tertutup sederhana C di D. Jika f analitik dan f ' kontinu pada D, maka $\int_C f(z)dz = 0$

Bukti:
Misalkan *f(z) = u(x,y) + iv(x,y)* dan *f* analitik pada *D.* Jadi *f '* ada untuk setiap *z* $\in$ *D* dan

f '(z) = ux(x,y) + ivx(x,y) = vy(x,y) –iuy(x,y). Karena *f '* kontinu pada *D,* maka *u, v, ux, uy,v, dan vy* semuanya kontinu pada *D*. Dengan demikian *u* dan *v* memenuhi syarat berlakunya teorema Green, yaitu

$$\int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) = \iint_D (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_D (u_x - v_y)dxdy$$

Karena *u* dan *v* memenuhi persamaan Cauchy Reimann pada *D,* maka integral lipat dua di ruas kanan menjadi nol. Sedangkan di ruas kiri adalah rumus untuk $\int_C f(z)dz$. Jadi $\int_C f(z)dz$ = 0.

Pada Teorema Cauchy di atas mencakup hipotesis tambahan bahwa *f ’* kontinu pada D tetapi jika *f* analitik pada daerah *D*, maka *f ’* juga analitik dan kontinu pada *D*. Oleh karena itu, Goursat berpendapat bahwa kekontinuan *f ’* merupakan suatu hipotesis yang berlebihan. Hal ini sudah diimplikasikan oleh keanalitikan *f.*

TEOREMA 5.3.2 (Teorema Cauchy-Goursat):

Diberikan daerah terhubung sederhana D dan lintasan tertutup sederhana C di D. Jika f analitik pada D, maka $\int_C f(z)dz = 0$

Bukti teorema tersebut cukup panjang, oleh karena itu dalam pembicaraan di sini tidak akan dibuktikan.

Konvers dari Teorema Cauchy Goursat adalah *salah,* yaitu

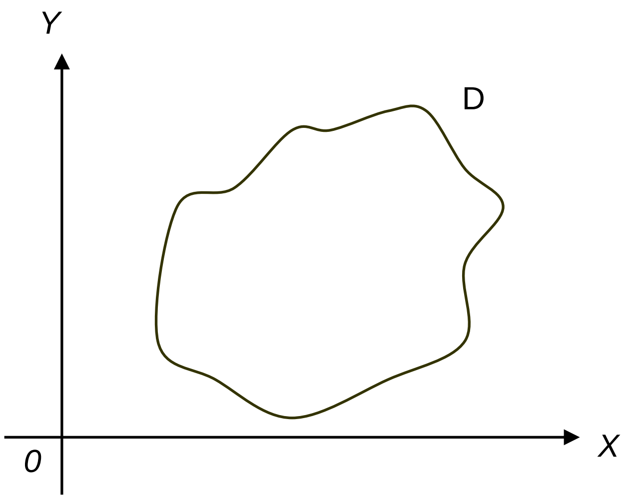
“Jika $\int_C f(z)dz = 0$ *untuk setiap lintasan tertutup sederhana C di dalam daerah terhubung sederhana D, maka f analitik di D”.*

Sebagai contoh yang menggambarkan kenyataan ini diperlihatkan oleh fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$. Integral $\int_C \frac{dz}{z} = 0$ jika *C* lintasan tertutup sederhana yang tak melalui *0*, tetapi *f* tak analitik di *0.*

TEOREMA 5.3.3 (Perluasan Teorema Cauchy-Goursat):

Diberikan daerah terhubung sederhana D, z1 dan z2 titik tetap dalam D, dan C, K dua lintasan yang menghubungkan z1 dan z2 dimana C, K $\subseteq$ *D. Jika f analitik pada D, maka*

Bukti:



Misalkan *L = C + (-K),* maka

$$\int_L f(z)dz = \int_C f(z)dz + \int_{-K} f(z)dz = 0$$

$$\int_{z_1, C}^{z_2} f(z)dz = \int_{z_1, K}^{z_2} f(z)dz$$

$$\int_{-K} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

$$\int_K f(z)dz = \int_C f(z)dz$$

Contoh:

Hitunglah $\int_C (3z^2 - 2z)dz$

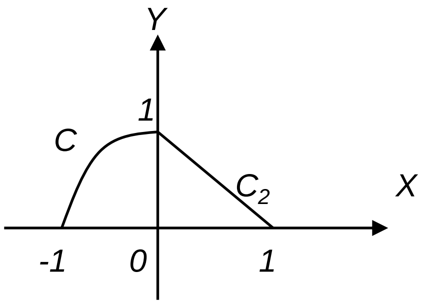
dimana

C_1 : busur lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dari titik $(-1,0)$ ke $(0,1)$

C_2 : ruas garis dari titik $(0,1)$ ke $(1,0)$

$C = C_1 + C_2$

Penyelesaian:



Karena $f(z) = 3z2 - 2z$ analitik pada **C** yang memuat $z1 = -1$ dan $z2 = 1$. Menurut teorema di atas harus dipilih lintasan sebarang dari $z1$ dan $z2$. Lintasan yang paling mudah dalam kasus ini garis lurus dari ke $z2$ adalah lintasan $K: y = 0, \ -1 \leq x \leq 1.$

Dengan demikian diperoleh,

$$\int_C (3z^2 - 2z)dz = \int_{-1}^{1} (3x^2 - 2x)dx = 2$$

TEOREMA 5.3.4 (Teorema Dasar Pertama Integrasi Kompleks):

Jika D daerah terhubung sederhana, z_1 suatu titik tetap di D dan f analitik pada D, maka untuk setiap z $\in$ D berlaku

$$A(z) = \int_{z_1}^{z} f(w)dw \Rightarrow A'(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_{z_1}^{z} f(w)dw\right) = f(z)$$

Bukti:

$$A'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{A(z+\Delta z) - A(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int_{z_1}^{z+\Delta z} f(w)dw - \int_{z_1}^{z} f(w)dw}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int_{z}^{z+\Delta z} f(w)dw}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int_{z}^{z+\Delta z} (f(w) - f(z) + f(z))dw}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int_{z}^{z+\Delta z} (f(w) - f(z))dw + \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dw}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int_{z}^{z+\Delta z} (f(w) - f(z))dw}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dw}{\Delta z}$$

Karena $\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dw = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} dw$

$= f(z)[w]_{z}^{z+\Delta z}$

$= f(z)[(z+\Delta z)-z]$

$= f(z)\Delta z$

maka diperoleh,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dw}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z).\Delta z}{\Delta z} = f(z)$$

Fungsi *f(w)* analitik di $z \in$ ***C****,* mengakibatkan *f* kontinu di $z \in$ **C**. *Hal ini berarti untuk setiap bilangan* ε *> 0* terdapat bilangan δ *> 0* sehingga jika $|w-z| < \delta$ *berlaku*

$$|f(w)-f(z)| < \varepsilon$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(w)-f(z)]dw\right| < \varepsilon.|\Delta z|$$

$$\frac{\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(w)-f(z)]dw\right|}{\Delta z} < \varepsilon.\frac{|\Delta z|}{\Delta z} = \varepsilon$$

Akibatnya,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left| \int_{z}^{z+\Delta z} [f(w) - f(z)] dw \right|}{\Delta z} = 0$$

Jadi terbukti bahwa *A'(z) = f(z).*

Dari teorema di atas, dapat diperluas menjadi suatu teorema yang lebih sederhana, teorema tersebut dikenal dengan nama teorema dasar kedua integral kompleks. Sebelumnya, akan didahulu dengan pengertian anti turunan dari suatu fungsi yang disajikan di dalam Definisi 5.3.5 dan Teorema 5.3.6 berikut.

DEFINISI 5.3.5:

Diberikan $D \subseteq \mathbf{C}$ terbuka dan fungsi $f : D \to \mathbf{C}$. Fungsi $F : D \to \mathbf{C}$ disebut anti turunan f pada D, jika berlaku $F'(z) = f(z)$ untuk setiap $z \in D$.

TEOREMA 5.3.6:

Diberikan fungsi $f : D \to \mathbf{C}$ analitik pada D. Jika fungsi $G : D \to \mathbf{C}$ anti turunan dari f,

maka terdapat konstanta $k \in \mathbf{C}$ sehingga $H(z) = G(z) + k$, untuk setiap $z \in D$.

Bukti:

Karena G dan *H* anti turunan *fungsi* *f* pada *D,* diperoleh

$G'(z)=f(z)=H'(z)$ untuk setiap $z \in D$ atau $(H' - G')(z)=f(z) - f(z)=0$ *untuk setiap* $z \in D$.

Jika $(H - G)'(z) = 0$ untuk setiap $z \in D$, *maka terdapat* $k \in \mathbf{C}$ sehingga berlaku

$(H-G)(z) = k$, untuk setiap $z \in D$.

Jadi terbukti bahwa

$H(z) = G(z) + k$, untuk setiap $z \in D$.

TEOREMA 5.3.7(Teorema Dasar Kedua Integrasi Kompleks):

Diberikan D daerah terhubung sederhana, z_1 dan z_2 titik tetap di D. Jika f analitik pada D dan F anti turunan dari f pada D, maka $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = f(z_1) - f(z_2) = f(z)\Big]_{z_1}^{z_2}$

Bukti:

$F(z) = \int_{z_1}^{z_2} f(w)dw$ adalah suatu anti turunan dari *f* dan *G(z)=k+*$\int_{z_1}^{z} f(w)dw$ anti turunan sebarang dari *f,* maka

$$G(z_2) = k + \int_{z_1}^{z_2} f(w)dw$$

$$G(z_1) = k + \int_{z_1}^{z_1} f(w)dw = k + 0 = k$$

Akibatnya

$$G(z_2) = G(z_1) + \int_{z_1}^{z_2} f(w)dw$$

Jadi, diperoleh

$$\int_{z_1}^{z_2} f(w)dw = G(z_2) - G(z_1)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = k + F(z_2) - k - F(z_1)$$

$$= F(z_2) - F(z_1)$$

Integral dari suatu fungsi yang menyeluruh sepanjang sebarang lintasan yang menghubungkan dua titik pada bidang datar dapat dihitung secara langsung, asalkan anti turunan fungsi tersebut dapat ditemukan. Demikian pula integral dari fungsi analitik, asalkan titik awal dan titik akhir lintasan integrasinya seluruhnya terletak di dalam daerah terhubung sedehana di mana fungsi itu analitik.

Contoh:

1. $\int_{-i}^{1+i} 2z dz = z^2 \Big]_{-i}^{1+i} = 1 + 2i$
2. $\int_{0}^{i\pi} e^{z+1} dz = e^{z+1} \Big]_{0}^{i\pi} = -2e$
3. $\int_{\pi}^{i} \sin z\, dz = -\cos z \Big]_{\pi}^{i} = -1 - \cos i$

LATIHAN 5.3

1. Hitunglah integral berikut.

   a. $\int_{-1}^{2i} (z^2 + z + 1) dz$

   b. $\int_{\pi i}^{2\pi i} \cosh z \, dz$

   c. $\int_{o}^{i} z e^{z^2} dz$

   d. $\int_{0}^{\pi} (e^z - \sin z) dz$

   e. $\int_{0}^{\pi i} (e^z - \sin z) dz$

   f. $\int_{0}^{\pi} z \cos^2 z \, dz$

2. Misalkan γ sebarang lintasan tertutup yang tidak memuat nol. Carilah $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz$

3. Misalkan *f* analitik pada region yang memuat γ. Tunjukkan bahwa $\int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$

   adalah imajiner murni (kekontinuan *f'(z)* yang menjamin).

5.4 Annulus

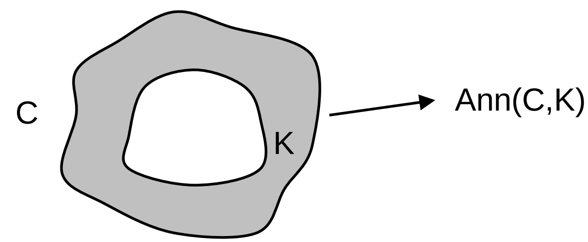
Pada pasal ini akan dibicarakan pengintegralan dari fungsi yang analitik pada suatu annulus tertutup dan bagaimana mengkaji penggunaan Teorema Cauchy dalam masalah ini. Sebelum membicarakan masalah tersebut lebih lanjut, akan disajikan terlebih dahulu definisi dari annulus. **5.4 Annulus**

Pada pasal ini akan dibicarakan pengintegralan dari fungsi yang analitik pada suatu annulus tertutup dan bagaimana mengkaji penggunaan Teorema Cauchy dalam masalah ini. Sebelum membicarakan masalah tersebut lebih lanjut, akan disajikan terlebih dahulu definisi dari annulus.

DEFINISI 5.4.1:

(a) Diberikan C lintasan sederhana dan D daerah yang dibatasi oleh C. Interior C didefinisikan dengan $IntC = D^0$ *dan eksterior C dengan* $EksC=(D^c)^0$

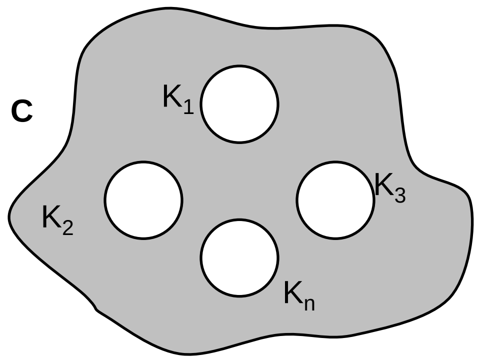
(b) Diberikan C dan K dua lintasan tertutup sederhana dengan $Int\ K \subseteq Int\ C$.
Annulus yang ditentukan oleh C dan K didefinisikan dengan
$Ann(C,K) = Int\ C \cap Eks\ K$ *= Himpunan semua titik yang terletak di dalam C dan di luar K*



(c) Diberikan $C, K_1, K_2, \ldots, K_n$ *adalah (n+1) lintasan tertutup sederhana dengan* $Int\ K_i \subseteq Int\ C$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ *dan* $Int\ K_i \cap Int\ K_j = \phi$, $(i \neq j)$.

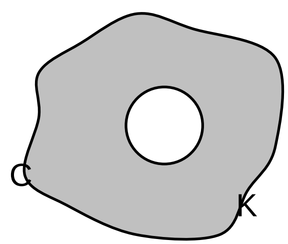
Annulus yang ditentukan oleh C, K_1, K_2, …, dan K_n didefinisikan dengan

Ann(C, K_1, K_2, …, K_n) = Int C $\cap\ (\bigcup_{i=1}^{n} eks\ K_i)$ = Himpunan semua titik yang terletak di dalam C dan di luar K_1, K_2, …, K_n



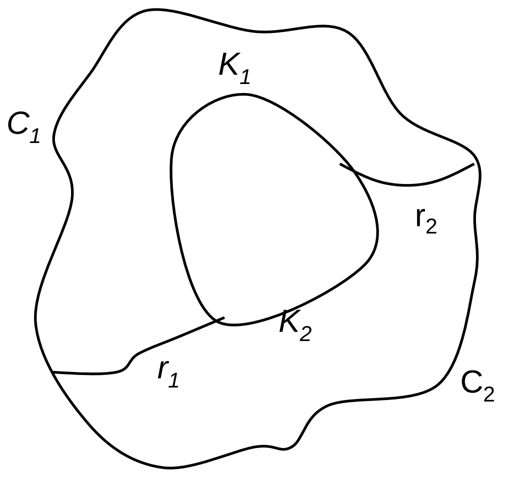
TEOREMA 5.4.2(Teorema Annulus):
Jika C dan K dua lintasan tertutup sederhana dan f analitik pada C $\cup$ K $\cup$ Ann(C,K), maka

$$\oint_C f(z)dz = \oint_K f(z)dz$$ *asalkan C dan K dijelajahi dengan orientasi yang sama.*



Catatan:
Teorema Annulus digunakan jika f tak analitik di suatu titik pada interior K.

Bukti:



Lintasan $C = C_1 + C_2$, *dan* lintasan $K = K_1 + K_2$. Perhatikan dua lintasan tertutup sederhana

$C_1 + r_1 - K_1 - r_2$ dan $C_2 + r_2 - K_2 - r_1$

Menurut Teorema Cauchy diperoleh

$$\int_{C_1+r_1-K_1-r_2} f(z)dz + \int_{C_2+r_2-K_2-r_1} f(z)dz = 0$$

Karena r_1 dan r_2 dijelajahi dalam kedua arah, maka dari integrasi di atas tidak memeberikan arti apa-apa, sehungga

$$\int_{C_1-K_1} f(z)dz + \int_{C_2-K_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz - \int_{K_1+K_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C} f(z)dz = \int_{K} f(z)dz$$

TEOREMA 5.4.3 (Teorema Perluasan Teorema Annulus):

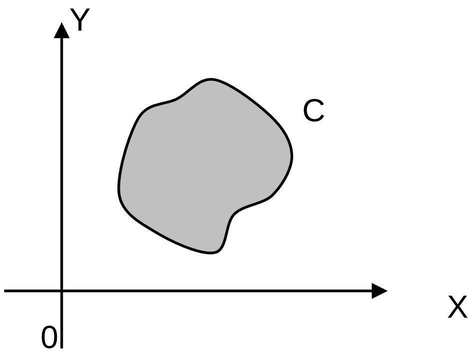
Diberikan C, K_1, K_2, …, K_n adalah (n + 1) lintasan tertutup sederhana. Jika f analitik pada C $\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) \cup Ann(C, K_1, K_2, \ldots, K_n)$

maka $\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{K_i} f(z)dz$

Contoh:

Hitunglah $\oint_C \frac{dz}{z}$, lintasan *C* tak melalui *0.*

Penyelesaian:
Kasus (1): *0* $\notin$ *Int C*

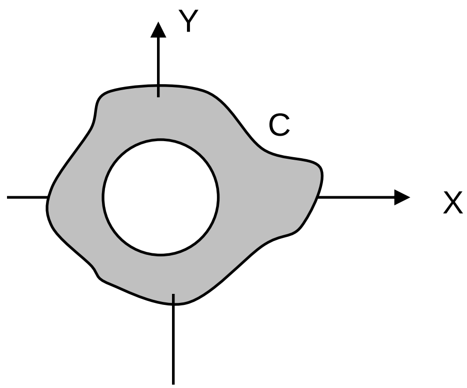


.

Misalkan *D* = *C* $\cup$ *Int C* dan $f(z) = \frac{1}{z}$, maka *f* analitik pada *D* dan $\oint_C \frac{dz}{z} = 0$

Kasus (2): *0* $\in$ *Int C.*

Kasus (2): $0 \in Int\ C$.



Misalkan $K = \{ z : |z| = 1 \}$.

Karena f analitik pada $C \cup K \cup Ann(C,K)$ dengan C, K lintasan tertutup sederhana, maka menurut Teorema Annulus diperoleh

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_K \frac{dz}{z}$$

.

Misalkan $z = e^{it}$ dengan $0 \le t \le 2\pi$, maka $dz = ie^{it}dt$

Dari sini, diperoleh

$$\int_K \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} idt = it \Big]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

Dengan demikian

$$\int_C \frac{dz}{z} = \begin{cases} 0, 0 \notin IntC \\ 2\pi i, 0 \in IntC \end{cases}$$ dengan C tak melalui 0.

TEOREMA 5.4.4:

Diberikan C, K lintasan tertutup sederhana di daerah terhubung sederhana D. Jika f analitik pada C $\cup$ K $\cup$ Ann(C,K), maka

$$\int_C \frac{dz}{z - z_o} = \begin{cases} 0, z_o \notin IntC \\ 2\pi i, z_o \in IntC \end{cases}$$

dengan C tak melalui z_o

Bukti:

Misalkan $z_o \in$ *Int C* dan C lingkaran yang pusatnya di z_o dengan jari-jari r, diperoleh

$C : \ |z - z_o| = r,$

sehingga

$$z - z_0 = re^{it}$$

$$, 0 \le t \le 2\pi, \ r > 0$$

$$z = z_o + re^{it}$$

$$dz = ire^{it} dt$$

Jadi terbukti bahwa

$$\int_C \frac{dz}{z - z_o} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

TEOREMA 5.4.5(Teorema Rumus Integral Cauchy):
Diberikan C lintasan tertutup sederhana yang berorientasi positif dan $z_o \in$ Int C. Jika f analitik pada C $\cup$ Int C, maka

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_o}dz$$

Bukti:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_o}dz = \int_C \frac{[f(z) - f(z_o)] + f(z_o)}{z - z_o}dz$$

$$= \int_C \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}dz + f(z_o)\int \frac{dz}{z - z_o}$$

Karena *f* analitik pada *C* $\cup$ *Int C,* maka *f'(z)* ada untuk setiap *z* $\in$ C $\cup$ *Int C.* Karena $z_o \in$ *Int C*, maka *f'*(z_o) ada, sehingga *f* kontinu di z_o*. Hal ini berarti untuk setiap* ε *> 0* terdapat δ *> 0* sehingga jika $|z - z_o| < \delta$ berlaku

$$|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon$$

Misalkan

$$\int_C \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o dz} = \int_L \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}dz$$ dengan *L* = $\{z : |z-z_o| = \lambda \le \frac{\delta}{2}\}$

Diperoleh $0 \le \left|\int_L \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}dz\right| \le \frac{\varepsilon}{\lambda}|L| = \frac{\varepsilon}{\lambda}2\pi\lambda,\ |\mathrm{L}| = 2\pi\lambda = 2\pi\varepsilon$

Jadi, $\int_C \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}dz = \int_L \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}dz = 0$ ……………. (1)

Misalkan $\int_C \frac{dz}{z-z_o} = \int_K \frac{dz}{z-z_o},\ K = \{z : |z-z_o| = 1\}$, maka $\int_C \frac{dz}{z-z_o} = 2\pi i$ ……… (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_o}dz = 0 + f(z_o).2\pi i = 2\pi i f(z_o)$$

TEOREMA 5.4.6(Teorema Perumuman Rumus Integral Cauchy):
Diberikan C lintasan tertutup sederhana yang berorientasi positif, $z_o \in$ Int C. Jika f analitik pada $C \cup$ Int C, maka

$$f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_o)^{n+1}}\,dz$$

Contoh:
Tentukan $\int_C \frac{dz}{z^3+4z}$ dimana

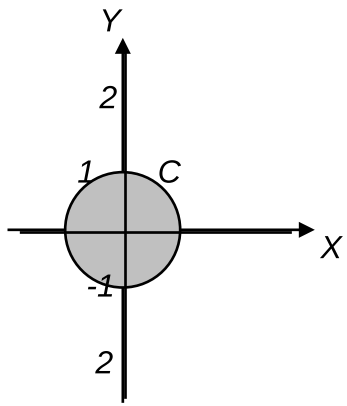
a. *C :* $|z| = 1$, orientasi *C* positif

b. *C :* $|z| = 4$, orientasi *C* positif

Penyelesaian:

a. $z^3 + 4z = z(z^2+4) = z(z+2i)(z-2i)$

$f(z) = \frac{1}{z^3+4z}$ tak analitik di *z = 0, z = -2i,* dan *z = 2i*



$$\int_C \frac{dz}{z^3+4z} = \int_C \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{z(z+2i)(z-2i)}}$$

$$= \int_C \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z} dz$$

Diambil $g(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$, maka *g* analitik pada $C \cup Int\ C$.

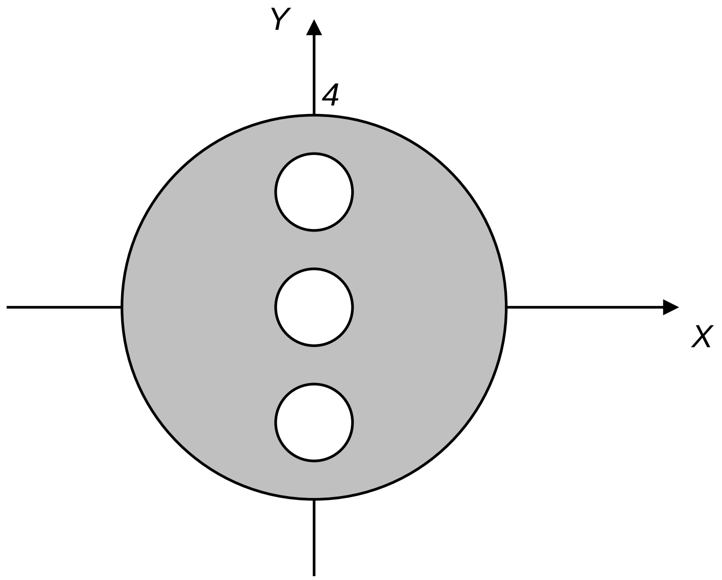
Jadi, diperoleh

$$\int_C \frac{dz}{z^3+4z} = \int_C \frac{g(z)}{z} dz$$

$$= 2\pi i . g(0)$$

$$= \frac{1}{2}\pi i$$

b. C : $|z| = 4$, orientasi C positif



Misalkan lintasan K_1, K_2, dan K_3 adalah

K_1 : $|z| = \frac{1}{2}$

K_2 : $|z - 2i| = \frac{1}{2}$

K_3 : $|z + 2i| = \frac{1}{2}$

Dengan $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, $K_1 \cap K_3 = \varnothing$, dan $K_2 \cap K_3 = \varnothing$.

Jadi, diperoleh

$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2+4)} = \oint_{K_1} \frac{dz}{z(z^2+4)} + \oint_{K_2} \frac{dz}{z(z^2+4)} + \oint_{K_3} \frac{dz}{z(z^2+4)}$$

$$= \oint_{K_1} \frac{\frac{1}{z(z+2i)}}{z-2i}dz + \oint_{K2} \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z}dz + \oint_{K3} \frac{\frac{1}{z(z-2i)}}{z+2i}dz$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{z(z+2i)}\right)_{z=2i} + 2\pi i\left(\frac{1}{z^2+4}\right)_{z=0} + 2\pi i\left(\frac{1}{z(z-2i)}\right)_{z=-2i}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{8}\right) + 2\pi i\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi i\left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$= 0$$

LATIHAN 5.4

1. Hitunglah integral berikut :

a. $\int_C \frac{dz}{z^2(z+1)^2}$, $C : |z| = 4$ dengan orientasi positif

b. $\int_C \frac{e^{2z} - z^2}{(z-2)^3} dz$, $C : |z-1| = 3$ dengan orientasi positif

c. $\int_C \frac{Sinz}{z^2+\pi^2} dz$, $C : |z+2i| = 2 \text{ dan } C : |z| = 4$ dengan orientasi positif

d. $\int_C \frac{z^2 dz}{(z^2+4)^2}$, $C : |z| = 4$ dengan orientasi positif