PENGEMBANGAN RUANG FUNGSI KLASIK

Oleh:
Encum Sumiaty
FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia Bandung
e-mail: e.sumiaty@yahoo.com

Abstrak

Diketahui ruang fungsi klasik $L_p(0,\infty)$. Melalui operator T pada ruang fungsi klasik $L_p(0,\infty)$. akan dibentuk sebuah ruang fungsi baru yang dinamai ruang fungsi Cesaro CES_p. Selanjutnya, pada karya tulis ini dipaparkan pula bahwa ruang fungsi Cesaro merupakan ruang yang lengkap terhadap norm yang didefinisikan padanya, mempunyai sifat solid, dan terbagi.

Kata Kunci: Ruang fungsi klasik $L_p(0,\infty)$, *Operator, Ruang fungsi Cesaro* CES_p*., sifat solid, dan sifat terbagi.*

PENGEMBANGAN RUANG FUNGSI KLASIK

Oleh:
Encum Sumiaty
FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia Bandung
e-mail: e.sumiaty@yahoo.com

A. Pendahuluan

Pembahasan mengenai suatu ruang fungsi baru selalu dikaitkan dengan pembentukannya, dan sifat-sifat yang berlaku pada ruang fungsi tersebut. Oleh karena itu, yang menjadi kajian utama dalam karya tulis ini adalah bagaimana definisi ruang fungsi yang baru (ruang fungsi *Cesaro*) yang dikaitkan dengan ruang fungsi klasik $L_p(0,\infty)$, dan menelusuri sifat-sifat yang berlaku pada ruang fungsi baru (ruang fungsi *Cesaro*).Secara khusus, masalah tersebut dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu:

1. Bagaimana definisi ruang fungsi *Cesaro*
2. Sifat-sifat apa yang berlaku pada ruang fungsi *Cesaro*.

B.Teori Pendukung

Definisi *1* (*Norma, Ruang Bernorma, Ruang Banach*)

Diberikan X suatu ruang vektor.

(i) *Sebuah norma pada ruang X yang dinotasikan dengan* $\|.\|$ *adalah fungsi yang memetakan unsur-unsur di X ke**R**, sehingga untuk setiap* $x,y \in X$ *dan* $a \in \mathbb{R}$ *memenuhi*:

(N1) $\| x \| \geq 0$, *dan* $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \| x |$

(N3) $\| x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

(ii) *Ruang vektor X yang dilengkapi dengan* $\|.\|$ *disebut ruang bernorma yang dinotasikan dengan* $(X, \|\cdot\|)$ *atau X* .

(iii) Ruang bernorma X $((X, \|\cdot\|))$ *disebut ruang Banach jika untuk setiap barisan Cauchy pada X konvergen di X . Dengan kata lain X ruang bernorma yang lengkap.*

Hubungan antara ruang metrik dengan ruang bernorma dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema 2

Jika X ruang bernorma maka X ruang metrik.

Dengan mendefinisikan suatu fungsi $d(x,y)=\|x-y\|$ maka fungsi tersebut jelas akan memenuhi syarat dari suatu metrik

***Teorema 3 (Kelengkapan L_p**$(0, \infty)$)

Ruang fungsi klasik $L_p(0,\infty)$, $1< p<\infty$ adalah ruang fungsi bernorma yang lengkap.

2. Himpunan Solid

Definisi 4

Diberikan X suatu himpunan tak kosong.. X dikatakan solid jika $|y| \leq |x|$ untuk suatu $x \in X$ mengakibatkan $y \in X$.

3. Himpunan Padat dan Ruang Terbagi

Definisi 5 (Himpunan Padat)

***D**iberikan X suatu ruang metrik. Sebuah himpunan bagian M dari X dikatakan padat di X jika $M = X$. Dengan M menyatakan penutup dari M .*

Definisi 6 (Ruang Terbagi)

Diberikan X suatu ruang metrik . X dikatakan terbagi (separable) jika memiliki himpunan bagian terhitung (countable) yang padat di X .

Definisi 8 (Fungsi Tangga)

Misalkan $I \subseteq \mathbb{R}$ adalah sebuah interval dan misalkan $s: I \to \mathbb{R}$. Fungsi s disebut fungsi tangga jika s hanya memiliki berhingga nilai berbeda, setiap nilai diasumsikan pada satu interval atau lebih.

Berikut ini adalah definisi dari fungsi terukur.

Definisi 9 (Fungsi Terukur)

Sebuah fungsi $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terukur jika terdapat sebuah barisan fungsi tangga $\{s_k\}$ pada $[a,b]$ sehingga $f(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

C. Hasil Kajian

1. Pembentukan Ruang Fungsi Cesaro

Misal *A* adalah suatu operator linear dan *Y* adalah sebuah ruang fungsi. Didefinisikan ruang baru *X*, $X := \{ f : Af \in Y \}$. Asumsikan bahwa pemetaan dari *X* ke *Y* adalah satu-satu dan surjektif.

Proses pembentukan ruang fungsi Cesaro dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 1

Misal $X := \{ f : Af \in Y \}$. *X disebut ruang fungsi Cesaro yang dinotasikan dengan* CES_p *jika A adalah operator linear T dengan*

$$\{T|f|(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt \quad \text{dan } Y = L_p(0,\infty), 1 < p < \infty$$

Dengan kata lain $f \in L_p(0,\infty)$ jika dan hanya jika

$$\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p} < \infty$$

Berdasarkan **Definisi 1** di atas menunjukkan bahwa ruang fungsi Cesaro memuat semua fungsi terukur f sehingga jika ditransformasikan oleh operator *T* terdapat pada ruang fungsi klasik $L_p(0,\infty)$.

2. Ruang fungsi Cesaro merupakan ruang fungsi yang lengkap Banach terhadap norma yang didefinisikan sbb

$$\|f\| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p}$$

3. *Ruang fungsi Cesaro* CES_p *adalah ruang solid.*

Bukti:

Misalkan $f \in CES_p$, maka $T|f| \in L_p(0,\infty)$, denan

$$(T|f|)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt < \infty$$

Jika $|g(t)| \le |f(t)|$ untuk setiap $t \in (0,\infty)$, maka

$$(T|g|)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |g(t)|dt \le \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt < \infty$$

Hal ini berarti bahwa $T|g| \in L_p(0,\infty)$. Dengan kata lain $g \in CES_p$

Terbukti bahwa *CES* merupakan ruang solid.

***3.** Ruang fungsi Cesaro $_pCES$ adalah ruang terbagi (separable).*

Bukti:

Misalkan W adalah ruang dari semua fungsi terukur bernilai rasional $(0,\infty)$ sehingga norma

$$\left[\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0 |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p} \text{ konvergen}$$

Akan ditunjukkan bahwa W merupakan subruang dari ruang CES_p, yaitu dengan menunjukkan bahwa W merupakan ruang bernorma.

Diambil sebarang $f, g \in$ W dan skalar α, diperoleh

$$(N_1)\ \|f\| = \left[\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p} \geq 0$$

dan

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ untuk semua $t \in (0,\infty)$, sebab

$$\|f\| = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left[\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\right)^p = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt = 0 \text{ (karena } x \in (0,\infty)\text{, maka } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow |f(t)| = 0$$

$$\Leftrightarrow f(t) = 0$$

$$(N_2)\ \|\alpha f\| = \left[\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x |\alpha f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p} = \left[\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}|\alpha|\int_0^x |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}|\alpha|\int_0^x |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_0^\infty |\alpha|^p \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= |\alpha| \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= |\alpha . \| f \||$$

(N$_3$) $$\|f+g\| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |(f+g)(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$\leq \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p} + \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |g(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= \|f\| + \|g\|$$

Karena norma yang didefinisikan memenuhi aksioma norma (N$_1$), (N$_2$), dan (N$_3$), maka W merupakan subruang fungsi bernorma.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa W padat di $CES_{p.}$

Perhatikan himpunan dari semua fungsi bernilai rasional dan semua titik akumulasinya yaitu fungsi bernilai irrasiona $\overline{W}$, sehingga membentuk ruang fungsi $CES_{p,}$ Ini berarti $\overline{W} = CES_{p,}$ Berdasarkan definisi, maka CES_p merupakan ruang terbagi

4. Ruang fungsi Cesaro CES_p adalah ruang solid.

Bukti:

Misalkan $f \in CES_p$, maka $T|f| \in L_p(0,\infty)$, denan

$$(T|f|)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt < \infty$$

Jika $|g(t)| \leq |f(t)|$ untuk setiap $t \in (0,\infty)$, maka

$$(T|g|)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x |g(t)| dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt < \infty$$

Hal ini berarti bahwa $T|g| \in L_p(0,\infty)$. Dengan kata lain $g \in CES_p$

Terbukti bahwa CES merupakan ruang solid.

***5.** Ruang fungsi Cesaro $_p$CES adalah ruang terbagi (separable).*

Bukti:

Misalkan W adalah ruang dari semua fungsi terukur bernilai rasional (0,∞) sehingga norma

$$\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^{}|f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p} \text{ konvergen}$$

Akan ditunjukkan bahwa W merupakan subruang dari ruang CES_p , yaitu dengan menunjukkan bahwa W merupakan ruang bernorma.

Diambil sebarang $f, g \in$ W dan skalar α, diperoleh

$$(\mathrm{N}_1)\ \|f\| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p} \geq 0$$

dan

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ untuk semua $t \in (0,\infty)$, sebab

$$\|f\| = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\right)^p = 0$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt = 0$ (karena $x \in (0,\infty)$, maka $x \neq 0$

$$\Leftrightarrow |f(t)| = 0$$

$$\Leftrightarrow f(t) = 0$$

$$(\mathrm{N}_2)\ \|\alpha f\| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x |\alpha f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p} = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}|\alpha|\int_0^x |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}|\alpha|\int_0^x |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_0^\infty |\alpha|^p \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= |\alpha| \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= |\alpha . \|f\||$$

(N$_3$) $\|f+g\| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |(f+g)(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$

$$\leq \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p} + \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |g(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= \|f\| + \|g\|$$

Karena norma yang didefinisikan memenuhi aksioma norma (N$_1$), (N$_2$), dan (N$_3$), maka W merupakan subruang fungsi bernorma.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa W padat di $CES_{p.}$

Perhatikan himpunan dari semua fungsi bernilai rasional dan semua titik akumulasinya yaitu fungsi bernilai irrasiona $\overline{W}$, sehingga membentuk ruang fungsi $CES_{p,}$ Ini berarti $\overline{W}$ = $CES_{p,}$ Berdasarkan definisi, maka CES_p merupakan ruang terbagi