

BAHAN AJAR 6

PELUANG BERSYARAT DAN KEBEBASAN STOKASTIK

Kemampuan Prasyarat:

Kalkulus 2 dan Teori Peluang

Situasi 1:

Kesetaraan Gender

Di suatu perusahaan terdapat kelompok pekerja pria dan wanita dengan skala penggajian yang berbeda-beda menurut kriteria tertentu. Setelah beberapa waktu dicatat prosentase kenaikan pangkat dari kedua kelompok tersebut, dicatat sebagai berikut:

Skala gaji	Banyak Pekerja		Prosentase Kenaikan Pangkat	
	Pria	Wanita	Pria	Wanita
5	80	6	84	100
7	195	8	87	88
9	335	29	88	93
11	695	102	8	7
13	185	15	11	7
15	165	10	7	10
17	81	2	9	0
19	41	1	7	0

- Definisikan beberapa peubah yang mungkin muncul dari situasi tersebut! Dan buatlah beberapa pernyataan yang mendukung.
.....
- Berdasarkan pernyataan pada butir a, buatlah pertanyaan matematik yang mungkin dapat diselesaikan!
.....
- Dengan mengingat kembali konsep-konsep matematika yang berkaitan, selesaikan pertanyaan yang dikemukakan pada butir b
- Kemukakan pertanyaan yang menunjukkan suatu peubah menjadi syarat bagi peubah lainnya.

.....
e. Carilah kemungkinan solusi yang paling tepat untuk menjawab pertanyaan tersebut, dan tulislah penyelesaiannya secara lengkap.

.....
f. Kemukaan suatu aturan atau formula yang umum, berdasarkan hasil penyelesaian pada butir a sampai dengan e.

.....

g. Responlah situasi 2 berikut, dengan menggunakan strategi yang lain.

Situasi 2: Seorang anak melempar sebuah mata uang dua kali. Hasil pengundian yang kedua ternyata muncul Gambar.

Selesaikan soal-latihan berikut di dalam kelas, jika tidak selesai kerjakan di rumah:

1. Dari seluruh mahasiswa di Bandung, dipilih seorang mahasiswa secara acak. Dapatkah peluang mendapat mahasiswa dari UPI dan Berprestasi ditentukan? Jelaskan!
2. Sebuah mata uang dilempar satu kali, jika pengundian menghasilkan Gambar (G) kemudian dilanjutkan dengan melempar sebuah dadu. Jika lemparan menghasilkan Huruf (H) maka dilanjutkan pelemparan mata uang lagi. Bagaimana menentukan nilai peluang mendapat mata dadu bernilai genap. Berapa peluang mendapatkan Gambar.
3. Dalam sebuah kotak terdapat 20 lampu, 5 lampu diantaranya rusak. Kemudian dicoba 3 lampu secara acak tanpa pengembalian. Berapa peluang ketiga lampu rusak.
4. Sebuah permen diambil dari sebuah kotak yang terdiri dari 20 permen rasa jeruk, 15 permen rasa asam, dan 10 permen rasa cola. Tentukan peluang bahwa permen yang diambil rasa cola.
5. Sebuah kelas terdiri dari 55 % siswa wanita. 2% dari siswa wanita dan 5% dari siswa laki-laki mempunyai tinggi badan lebih dari 170 cm. Seorang siswa dipanggil secara acak dan ternyata mempunyai tinggi badan lebih dari 170 cm. Berapa peluang bahwa yang dipanggil tersebut adalah wanita.
6. Dua buah kotak berisi bola tenis. Kotak A berisi 8 bola berwarna kuning dan 6 bola berwarna putih, kotak B berisi 10 bola berwarna kuning dan 5 bola berwarna putih. Kemudian diambil sebuah bola secara acak. Berapa peluang bahwa yang terambil adalah
 - a. Bola berwarna kuning

- b. Bola berwarna bukan putih dari kotak A dan berwarna putih dari kotak B
 - c. Salah satu bola berwarna kuning
 - d. Salah satu bola berwarna putih
7. Pada sebuah arisan yang diikuti oleh 40 orang dilakukan pengundian dengan cara mengacak kemas bernomor peserta yang digulung dari sebuah kotak. Berapa peluang bahwa kertas yang diambil bernomor
- a. Bilangan prima
 - b. Bilangan genap
 - c. Bilangan kelipatan 7.
8. Suatu keluarga mempunyai dua anak. Berapa peluang bahwa kedua anak itu laki-laki jika diketahui bahwa paling sedikit satu dari dua anak itu laki-laki.
9. Misalkan X dan Y adalah dua peubah acak dengan fungsi peluang gabungan sebagai berikut:

		$p_{X,Y}(x, y)$	
		0	1
y	x		
	0	$\frac{1}{4}$	0
1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(i)

		$p_{X,Y}(x, y)$	
		0	1
y	x		
	0	$\frac{1}{3}$	0
1		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

(ii)

Periksa apakah X dan Y pada (i) dan (ii) peubah acak bebas.

10. Misalkan X dan Y adalah dua peubah acak dengan fungsi peluang gabungan sebagai berikut:

		$p_{X,Y}(x, y)$			
		0	1	2	3
y	x				
	0	0,08	0,11	0,09	0,03
1		0,04	0,12	0,21	0,05

2	0,09	0,06	0,08	0,04
---	------	------	------	------

Tentukan !

- a. $P[X+Y \leq 5]$
 - b. $P[X+Y > 4]$
 - c. $P[XY \leq 10]$
 - d. Fungsi peluang marginal dari X dan dari Y
 - e. Fungsi peluang bersyarat dari X bila $Y=3$
 - f. Fungsi peluang bersyarat dari Y bila $X=2$
 - g. Tentukan nilai dari $P[X=0/Y=1]$ dan $P[X=x/Y=1]$
11. Misalkan X menyatakan bilangan yang muncul bila sebuah dadu hijau dilempar dan Y menyatakan bilangan yang muncul bila dadu merah dilempar.
Bagaimana menentukan variansi dari peubah acak
- a. $2X-Y$
 - b. $X+3Y-5$
12. Suatu senat mahasiswa yang terdiri dari 16 orang masing-masing 4 orang dari tingkat I, II, III, dan IV. Mereka sedang membahas masalah kecurangan dalam ujian yang menyebabkan pemecatan mahasiswa dari universitas. Suatu panitia beranggotakan 4 orang dipilih secara acak dari anggota senat. Berapa peluang panitia ini mempunyai
- a. Anggota semuanya dari tiap tingkat
 - b. Seorang anggota dari tiap tingkat
 - c. Masing-masing 2 orang dari tingkat II dan tingkat IV.

BAHAN AJAR 7
EKSPEKTASI MATEMATIK

Situasi 1:

Petuang yang Hampa

Dua orang pemuda A dan B bertaruh dengan melakukan undian menggunakan sebuah mata uang. Jika dalam undian itu nampak gambar maka A membayar B sebanyak Rp.10.000,- dan jika nampak huruf, maka B membayar A sebanyak Rp. 10.000,-

- a. Pahami situasi di atas, kemudian buat beberapa pernyataan yang lebih ringkas dengan kata-kata sendiri!

.....
.....

- b. Berdasarkan pernyataan pada bagian a, Buatlah pertanyaan matematik yang mungkin dapat diselesaikan!

.....
.....

- c. Periksa ulang pertanyaan yang dikemukakan pada bagian d, apakah ada pertanyaan lain yang mungkin diajukan, bila perlu telaah kembali permasalahan yang dikemukakan.
- d. Carilah kemungkinan–kemungkinan solusi yang paling tepat, dan tuliskan penyelesaiannya secara lengkap.
.....
.....
- e. Dari penyelesaian yang dihasilkan pada bagian f, dapatkan dikemukakan suatu aturan atau formula yang umum, jika ada, coba kemukakan suatu persoalan serupa dengan situasi 1.
- f. Untuk meresponlah situasi 2 berikut, carilah strategi lain yang mungkin cocok atau gunakan langkah-langkah seperti pada situasi 1.

Situasi 2:

Produksi semacam barang rusak 6%. Sebuah barang diabil secara acak dari sejumlah 50 barang.

Selesaikan soal-soal berikut:

1. Dengan membeli sejenis saham tertentu, seorang dapat memperoleh keuntungan setahun sebesar Rp. 30.000,- dengan peluang 0,3 atau rugi Rp. 10.000,- dengan peluang 0,7. Berapakah harapan matematiknya.
2. Dalam permainan judi seseorang harus dibayar Rp.20.000,- bila menarik kartu jack atau queen dan Rp.50.000,- bila menarik kartu king atau as dari segepok kartu bridge. Bila mnarik kartu lain ia dinyatakan kalah. Apakah permainantersebut adil?
3. Jika dari 12 TV berwarna yang 2 diantaranya rusak, 3 TV diambil secara acak untuk dikirim ke suatu hotel, berpa banyaknya TV rusak yang diharapkan terpilih dalam pengiriman tersebut.

4. Jika X suatu peubah acak dengan $f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases}$ hitung nilai harapan untuk X .

5. Jika X suatu peubah acak dengan $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{15}, & x = 1,2,3,4,5 \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases}$

hitung nilai $E[X+2]$; $E[(X^2 - 1)]$

6. Sebuah kotak berisi bola dengan nomor 1,2,3,4. Kemudian diambil dua bola secara acak tanpa pengembalian. Jika X menunjukkan jumlah angka dari dua bola yang terambil, hitunglah

a. $E(X^2-1)$ b. $E(X^3-2X^2+x+1)$ c. $Var(X)$

7. Jika Y suatu peubah acak dengan $f(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(y+1), & 2 < y < 4 \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases}$

Tentukan nilai

a. $E(Y^2 - 1)$ b. $E(Y^3 - 2Y^2 + Y + 1)$ c. $Var(Y)$

8. Misalkan X suatu peubah acak dengan fungsi kepadatan

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{(r-1)}{x^r}, & \text{untuk } x > 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases} \quad \text{untuk suatu } r \geq 3.$$

Tunjukkan bahwa $E(X^s)$ ada untuk $s \leq r-2$ dan tidak ada untuk $s \geq r-1$.

9. Suatu roda Roulet terdiri dari 18 tempat berhentinya bola berwarna merah, 18 berwarna hijau dan 2 tempat berwarna hitam. Untuk sekali bermain harus membayar Rp.2000,- Mendapat Rp.500,- bila kena tempat merah, Rp 1000,- bila kena warna hijau dan Rp.10.000,- bila kena warna hitam. Berapa harapan keuntungan bersih setelah sekali main? Berapa harapan keuntungan setelah 100 kali main?.