**BAHAN AJAR 8**

**EKSPEKTASI KHUSUS, MOMEN DAN PEMBANGKIT MOMEN**

## KEUNTUNGAN BERSIH

Dalam permainan rulet terdapat 40 tempat berhentinya bola, dimana 18 tempat berwarna merah, 18 tempat berwarna hijau, dan 2 tempat berwarna hitam. Misalkan untuk sekali main harus membayar \$ 2, bila berhenti di tempat berwarna merah mendapat \$ 0,5; dan bila berhenti di tempat berwarna hijau mendapat \$ 1,5 serta bila berhenti di tempat berwarna hitam mendapat \$10. Misal $X$ menyatakan kemenangan sekali permainan.

a. Bagaimana mengitung harapan sekali main?

   …………………………………………………………………………………

b. Bagaimana mendapatkan harapan dari keuntungan bersih?

   ………………………………………………………………………………

c. Dapatkah dicari kemenangan yang diharapkan dalam 100 kali main?

   …………………………………………………………………………………

d. Sifat apakah yang dapat dikemukakan dari jawaban bagian c?

e. …………………………………………………………………………………

f. Ajukanlah pertanyaan lain yang mungkin dapat diselesaiakan?

   …………………………………………………………………………………

g. Selesaikan pertanyaan tersebut dengan tuntas, kemudian selesaikan latihan berikut!

*1.* Momen takterpusat ke n dari suatu peubah acak $X$ dinyatakan dengan $\mu'_n = E(X^n)$ asalkan harapan ini ada. Dan momen terpusat dinyatakan dengan $\mu_n = E(X-EX)^n$. Bila momen ke- r $E(X^r)$ suatu p.a. ada maka $E(X^s)$ juga ada untuk s=1,2,3,…,r-1. Tunjukkan bahwa kebalikan dari pernyataan ini tidak berlaku, contoh untuk $f(x)= 2/x^3,\ 1<x<\infty$ (0 untuk selainnya).

2. Suatu fungsi kepadatan disebut simetris terhadap μ (untuk semua x) bila $f(\mu+x)=f(\mu-x)$. Tunjukkan bahwa $f(x)=\frac{1}{2}e^{-1/2x^2}, -\infty<x<\infty$ adalah simetris terhadap 0.
3. Buktikan bahwa untuk setiap p.a $X$, berlaku: $Var(X)= E(X-EX)^2$
4. Misalkan $X$ suatu p.a. dengan $E(X)$ dan $Var(X)$ ada. Tunjukkan bahwa $Var(X)< E(X-a)^2$, untuk semua $a \neq E(X)$
5. Diberikan $p(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} & , x=0,1,2,3,\ldots,n\\ 0 & , x \text{ yang lain}\end{cases}$

   Tujukkan bahwa $E(X^2)=E(X(X-1))+E(X)$.
6. Tujukkan sifat pada no. 6 untuk $p(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & , x=0,1,2,3,\ldots.\\ 0 & , x \text{ yang lain}\end{cases}$
7. Bila $X$ berdistribusi simetris tunjukkan bahwa: $\mu_3= E(X-EX)^3=0$
8. Fungsi pembangkit momen dari p.a $X$ didefinisikan dengan $M_X(t)=E(e^{tX})$

   Buktikan bahwa: a. $M_{X+a}(t)=e^{at}M_X(t)$ b. $M_{aX}(t)=M_X(at)$

   c. $E(X^n)=M_X^{(n)}(0)=\dfrac{d^n}{dt^n}M_X(t)\Big|_{t=0}$

   d. jika $X_1$ dan $X_2$ bebas maka $M_{X_1+X_2}(t)=M_{X_1}(t).M_{X_2}(t)$
9. Tunjukkan bahwa

$$M_X(t)=1+(EX)t+(EX^2)\frac{t^2}{2!}+(EX^3)\frac{t^3}{3!}+,,,+(EX^n)\frac{t^n}{n!}+\ldots$$