BAHAN AJAR 6

EKSPEKTASI MATEMATIK

Situasi 1:

Dua orang pemudaA dan B bertaruh dengan melakukan undian menggunakan sebuah mata uang. Jika dalam undian itu nampak gambar maka A membayar B sebanyak Rp.10.000,- dan jika nampak huruf, maka B membayar A sebanyak Rp. 10.000,-

a. Pahami situasi di atas, buat beberapa pernyataan yang lebih ringkas dengan kata-kata sendiri!

…………………………………………………………………………………

b. Buatlah pernyataan matematik yang mungkin dapat diselesaikan!

…………………………………………………………………………………

c. Untuk menyelesaikan pertanyaan-pertanyaan pada bagian c, tuliskan kembali konsep matematika yang berkaitan, atau bukalah catatan yang diperlukan.

………………………………………………………………………………….

d. Apakah ada pertanyaan lain yang mungkin diajukan, bila perlu telaah kembali permasalahan yang dikemukakan.

…………………………………………………………………………………

e. Carilah kemungkinan–kemungkinan solusi yang paling tepat, dan tulislah penyelesaiannya secara lengkap.

………………………………………………………………………………….

f. Dari penyelesaian yang dihasilkan pada bagian e, kemukaan suatu aturan atau formula yang umum

………………………………………………………………………………….

g. Responlah situasi 2 berikut,

Situasi 2:

Dalam permainan rulet terdapat 40 tempat berhentinya bola, dimana 18 tempat berwarna merah, 18 tempat berwarna hijau, dan 2 tempat berwarna hitam. Misalkan untuk sekali main harus membayar \$ 2, bila berhenti di tempat berwarna merah mendapat \$ 0,5; dan bila berhenti di tempat berwarna hijau mendapat \$ 1,5 serta bila berhenti di tempat berwarna hitam mendapat \$10. Misal X menyatakan kemenangan sekali permainan.

a. Bagaimana mengitung harapan sekali main?

   …………………………………………………………………………………

b. Bagaimana mendapatkan harapan dari keuntungan bersih?

   …………………………………………………………………………………

c. Dapatkah dicari kemenangan yang diharapkan dalam 100 kali main?

   …………………………………………………………………………………

d. Sifat apakah yang dapat dikemukakan dari jawaban bagian c?

   …………………………………………………………………………………

e. Ajukanlah pertanyaan lain yang mungkin dapat diselesaiakan?

   …………………………………………………………………………………

f. Selesaikan pertanyaan tersebut dengan tuntas, kemudian selesaikan latihan berikut!

Selesaikan soal-soal berikut:

1. Dengan membeli sejenis saham tertentu, seorang dapat memperoleh keuntungan setahun sebesar Rp. 30.000,- dengan peluang 0,3 atau rugi Rp. 10.000,- dengan peluang 0,7. Berapakah harapan matematiknya.
2. Dalam permainan judi seseorang harus dibayar Rp.20.000,- bila menarik kartu jack atau queen dan Rp.50.000,- bila menarik kartu king atau As dari segepok kartu bridge. Bila menarik kartu lain ia dinyatakan kalah. Apakah permainantersebut adil?

3. Jika dari 12 TV berwarna yang 2 diantaranya rusak, 3 TV diambil secara acak untuk dikirim ke suatu hotel, berpa banyaknya TV rusak yang diharapkan terpilih dalam pengiriman tersebut.

4. Jika X suatu peubah acak dengan $f(x)=\begin{cases} 2(1-x), 0<x<1 \\ 0\ ,\ x\ yang\ lain \end{cases}$ hitung nilai harapan untuk X.

5. Jika X suatu peubah acak dengan $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{15},\ x=1,2,3,4,5 \\ 0\ ,\ x\ yang\ lain \end{cases}$

   hitung nilai $E[X+2]$; $E[(X^2-1)]$

6. Sebuah kotak berisi bola dengan nomor 1,2,3,4. Kemudian diambil dua bola secara acak tanpa pengembalian. Jika X menunjukkan jumlah angka dari dua bola yang terambil, hitunglah

   a. $E(X^2-1)$ b. $E(X^3-2X^2+x+1)$ c. $Var(X)$

7. Jika Y suatu peubah acak dengan $f(y)=\begin{cases} \frac{1}{8}(y+1),\ 2<y<4 \\ 0\ ,\ x\ yang\ lain \end{cases}$

   a. $E(Y^2-1)$ b. $E(Y^3-2Y^2+Y+1)$ c. $Var(Y)$

8. Jika X suatu peubah acak dengan $f(x)=\begin{cases} 2(1-x), 0<x<1 \\ 0\ ,\ x\ yang\ lain \end{cases}$ hitung nilai $E(X^r)$ untuk r=1,2,3,4,5.

9. Momen takterpusat ke n dari suatu peubah acak X dinyatakan dengan $\mu'_n= E(X^n)$ asalkan harapan ini ada. Dan momen terpusat dinyatakan dengan $\mu_n= E(X-EX)^n$. Bila momen ke- r $E(X^r)$ suatu p.a. ada maka $E(X^s)$ juga ada untuk s=1,2,3,…,r-1. Tunjukkan bahwa kebalikan dari pernyataan ini tidak berlaku, contoh untuk $f(x)= 2/x^3,\ 1<x<\infty$ (0 untuk selainnya).

10. Suatu fungsi kepadatan disebut simetris terhadap μ (untuk semua x) bila $f(\mu+x)=f(\mu-x)$. Tunjukkan bahwa $f(x)=\frac{1}{2}e^{-1/2x^2}, -\infty < x < \infty$ adalah simetris terhadap 0.
11. Buktikan bahwa untuk setiap p.a X, berlaku: $Var(X)= E(X-EX)^2$
12. Misalkan X suatu p.a. dengan $E(X)$ dan $Var(X)$ ada. Tunjukkan bahwa $Var(X)< E(X-a)^2$, untuk semua $a \neq E(X)$
13. Diberikan $p(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}, & x=0,1,2,3,\dots,n\\ 0 & , x\ yang\ lain\end{cases}$ Tujukkan bahwa $E(X^2)=E(X(X-1))+E(X)$.]
14. Tujukkan sifat pada no. 6 untuk $p(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x=0,1,2,3,\dots.\\ 0 & , x\ yang\ lain\end{cases}$
15. Bila X berdistribusi simetris tunjukkan bahwa: $\mu_3= E(X-EX)^3=0$
16. Fungsi pembangkit momen dari p.a X didefinisikan dengan $M_X(t)=E(e^{tX})$

    Buktikan bahwa: a. $M_{X+a}(t)=e^{at}M_X(t)$ b. $M_{aX}(t)=M_X(at)$

    c. $E(X^n)=M_X^{(n)}(0)=\dfrac{d^n}{dt^n}M_X(t)\Big|_{t=0}$

    d. jika X_1 dan X_2 bebas maka
17. Tunjukkan bahwa

$$M_X(t)=1+(EX)t+(EX^2)\frac{t^2}{2!}+(EX^3)\frac{t^3}{3!}+,,,+(EX^n)\frac{t^n}{n!}+\dots$$