PEMBUKTIAN, PENALARAN, DAN KOMUNIKASI MATEMATIK

OLEH:
DADANG JUANDI
JurDikMat FPMIPA UPI 2008

PEMBUKTIAN DALAM MATEMATIKA

- Bukti menurut *Educational Development Center* (2003) adalah suatu argumentasi logis yang menetapkan kebenaran suatu pernyataan.
- Argumentasi memperoleh kesimpulannya dari premis pernyataan, teorema lain, definisi.
- Logis berarti setiap langkah dalam argumentasi dibenarkan oleh langkah-langkah sebelumnya.

PEMBUKTIAN

- Dalam proses pembuktian, dapat melibatkan diagram, kalimat verbal, simbolik, atau program komputer.
- Griffiths (dalam Weber, 2003) menyatakan bahwa bukti matematik adalah suatu cara berpikir formal dan logis yang dimulai dengan aksioma dan bergerak maju melalui langkah-langkah logis sampai pada suatu kesimpulan.

Tujuan melakukan pembuktian

- menurut *Educational Development Center* (2003) adalah untuk:
- (1) menyusun fakta dengan pasti,
- (2) memperoleh pemahaman,
- (3) mengkomunikasikan gagasan kepada orang lain,
- (4) tantangan,
- (5) membuat sesuatu menjadi indah, dan
- (6) mengkonstruksi teori matematika.

Tujuan pembuktian (Weber, 2003)

- Penjelasan (*explanation*), seorang pembaca dapat memahami kebenaran suatu pernyataan bila ia mempunyai penjelasan. Banyak pendidik matematika menyarankan bahwa penjelasan harus merupakan tujuan pembukti yang utama di dalam kelas matematika.
- Sistemisasi (*systemization*), seseorang dapat menggunakan bukti untuk mengorganisir antar konsep berlainan ke dalam satu kesatuan yang utuh. Dengan pengaturan sistem deduktif, seseorang dapat memperbaiki argumentasi yang mungkin salah atau tidak sempurna.

Tujuan Pembuktian

- Komunikasi (*communication*), bahasa bukti dapat digunakan untuk mengkomunikasikan konsep dan berdebat gagasan dengan orang lain.
- Penemuan hasil baru (*discovery of new result*), dengan menyelidiki konsekuensi logis definisi dan sistem aksiomatik, teori dapat dikembangkan.

Tujuan Pembuktian

- Pertimbangan suatu definisi (*justification of a definition*), seseorang dapat menunjukkan bahwa definisi dapat mengungkapkan esensi intuitif dari suatu konsep dengan menunjukkan bahwa semua sifat esensial konsep dapat diperoleh dari definisi yang diusulkan.
- Mengembangkan intuisi (developing intuition), dengan pengujian kelogisan definisi suatu konsep, seseorang dapat mengembangkan konseptual dan pemahaman intuitif tentang konsep yang dipelajari.

- Menyediakan otonomi (*providing autonomy*), mengajar siswa bagaimana cara membuktikan dapat memperkaya wawasannya untuk mengkonstruksi dan menvalidasi pengetahuan matematik secara bebas.

Metode Pembuktian

- Metode pembuktian diperlukan untuk meyakinkan kebenaran pernyataan atau teorema yang pada umumnya berbentuk implikasi atau biimpilikasi. Pembuktian pernyataan implikasi menurut Martono (1999) antara lain terdiri atas metode bukti langsung, metode bukti tak langsung (bukti dengan kontraposisi dan kontradiksi).
- Untuk membuktikan pernyataan yang berlaku untuk semua bilangan asli digunakan bukti dengan induksi matematik.

Bukti Langsung

- Untuk meyakinkan kebenaran pernyataan implikasi $P \rightarrow Q$ dengan bukti langsung, kita menggunakan pernyataan premis P sebagai suatu informasi dalam menunjukkan kebenaran pernyataan konsekuen Q.
- Contoh membuktikan teorema dengan bukti langsung.
- Teorema: Jika x bilangan ganjil maka x^2 juga bilangan ganjil.
- Bukti:
- Misalkan $x = 2k + 1$, untuk setiap $k \in Z$
- Akibatnya, $x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
- Karena $2k^2 + 2k$ adalah bilangan bulat maka $x^2 = 2p + 1$, dengan $p \in Z$
- Berarti x^2 adalah bilangan ganjil.
- Jadi terbukti jika x bilangan ganjil maka x^2 juga bilangan ganjil.

Bukti tak langsung

- Dari suatu implikasi adalah pembuktian yang menggunakan pernyataan ekivalen dengan implikasi tersebut.
- Bukti tak langsung terdiri atas bukti dengan kontraposisi dan bukti dengan kontradiksi.
- Bukti dengan kontraposisi pada implikasi $P \rightarrow Q$, yaitu dengan membuktikan □P $\rightarrow$ □Q karena implikasi ekivalen dengan kontraposisinya.
- Misalkan membuktikan teorema, jika x^2 bilangan genap maka x juga bilangan genap. Untuk membuktikan teorema ini terlebih dahulu dikontraposisikan, yaitu jika x bilangan ganjil maka x^2 juga bilangan ganjil. Selanjutnya Bukti dengan kontradiksi implikasi $P \rightarrow Q$, yaitu membuktikan pernyataan Q benar digunakan sifat □(□Q) □ Q. Dengan mengandaikan □Q benar akan ditunjukkan bertentangan dengan pernyataan P atau dengan sesuatu yang dianggap benar. Misalkan membuktikan teorema jika $r \in R$, $r^2 = 2$ maka r bukan bilangan rasional, dengan mengandaikan r bilangan

Contoh membuktikan teorema dengan bukti kontraposisi

- Jika x^2 bilangan genap maka x juga bilangan genap.
- Bukti:
- Untuk membuktikan teorema ini terlebih dahulu dikontraposisikan, yaitu:
- jika x bilangan ganjil maka x^2 juga bilangan ganjil.
- Misalkan $x = 2k + 1$, untuk setiap $k \in Z$
- Akibatnya, $x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
- Karena $2k^2 + 2k$ adalah bilangan bulat maka $x^2 = 2p + 1$, dengan $p \in Z$
- Berarti x^2 adalah bilangan ganjil. Akibatnya jika x bilangan ganjil maka x^2 juga bilangan ganjil.
- Jadi setelah dikontraposisikan, terbukti jika x^2 genap maka x juga bilangan genap.

Contoh membuktikan teorema dengan bukti kontradiksi

- Teorema: Jika $r \in R$, $r^2 = 2$ maka r bukan bilangan rasional.
- Bukti:
- Andaikan r bilangan rasional sedemikian sehingga $r^2 = 2$. Berdasarkan definisi bilangan rasional, r dapat ditulis dalam bentuk p/q, dengan $p, q \in Z$ dan $(p, q) = 1$.
- Karena $r^2 = 2$ maka $r^2 = (p/q)^2 = 2$ atau $p^2 = 2q^2$
- Berarti p^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan teorema jika x^2 bilangan genap maka x juga bilangan genap diperoleh p adalah bilangan genap.
- Karena p dan q saling relatif prima maka q haruslah bilangan ganjil……(1)
- Ambil $p = 2m$ untuk suatu $m \in Z$ maka $p^2 = (2m)^2 = 2q^2$ atau $2m^2 = q^2$
- berarti q^2 genap maka q genap…..(2).
- Dari (1) dan (2) terlihat bahwa kontradiksi karena tidak ada bilangan bulat yang genap sekaligus ganjil. Oleh karena itu, pengandaian salah seharusnya r bukan bilangan rasional. Jadi terbukti jika $r \in R$, $r^2 = 2$ maka r bukan bilangan rasional.

Bukti dengan Induksi Matematik

- Misalkan P(n) adalah suatu pernyataan tentang bilangan asli n. Kebenaran P(n) untuk semua bilangan asli n dibuktikan dengan menunjukkan:
    - P(1) benar, dan
    - Andaikan P(n) benar maka P(n + 1) juga benar

- Belajar untuk membuktikan suatu pernyataan merupakan suatu pekerjaan yang tidak mudah. Beberapa metoda dan pertimbangan dasar yang yang harus diperhatikan dalam mengembangkan argumentasi bukti, yaitu

  (1) mahasiswa memahami dengan jelas apa yang akan dibuktikan, mereka secara jelas mengidentifikasi premis dan kesimpulan dari suatu pernyataan,

  (2) mahasiswa harus memahami hubungan-hubungan antar langkah yang satu dengan lainya serta menjelaskan mengapa setiap langkah yang diambil itu benar. Misalnya memanipulasi representasi, mencari pemahaman yang mengarah ke bukti.

Skema Pembuktian

- Bukti adalah suatu argumentasi logis yang menetapkan kebenaran suatu pernyataan. Argumentasi tersebut dapat dipakai untuk meyakinkan seseorang tetang kebenaran atau kekeliruan suatu pernyataan. Skema pembuktian adalah struktur kognitif yang digunakan dalam proses melakukan atau mengerjakan bukti. Harel & Sowder (dalam Kanap, 2005) mengelompokkan skema pembuktian dalam tiga kategori, yaitu keyakinan eksternal, empiris, dan analitik. Ketiga skema ini merupakan representasi tingkat kognitif dalam mengembangkan matematik mahasiswa.

Skema Pembuktian

- Kelompok skema pembuktian keyakinan eksternal terdiri atas skema ritual dan otoritas. Skema ritual adalah meyakini kebenaran suatu bukti berdasarkan pada bentuk dari bukti; skema otoritas adalah meyakini kebenaran suatu bukti oleh otoritas dari buku teks, guru, dan orang lain.

Skema Pembuktian

- Kelompok skema pembuktian keyakinan empiris terdiri atas skema pembuktian induktif dan perceptual. Skema pembuktian induktif adalah meyakini kebenaran pernyataan berdasarkan kasus atau contoh yang spesifik. Skema pembuktian proseptual adalah meyakini kebenaran suatu pernyataan oleh beberapa gambar, skema ini kurang mentransformasikan penalaran mahasiswa.

Skema Pembuktian

- Kelompok skema pembuktian keyakinan analitik (disebut juga skema pembuktian deduktif) terdiri atas skema transformasional dan aksiomatik. Skema pembuktian transformasional adalah meyakini kebenaran pernyataan dari proses deduktif.
- Skema bukti transformasional terdiri atas skema kontekstual, generik, dan kausal. Skema pembuktian aksiomatik adalah meyakini kebenaran suatu pernyataan berdasarkan aksioma.

MATHEMATICAL COMMUNICATION

- *National Council of Teacher of Mathematics* :komunikasi matematik adalah kemampuan siswa dalam hal:
    1. membaca dan menulis matematika dan menafsirkan makna dan idea dari tulisan itu,
    2. mengungkapkan dan menjelaskan pemikiran mereka tentang idea matematika dan hubungannya,
    3. merumuskan definisi matematika dan membuat generalisasi yang ditemui melalui investigasi,
    4. menuliskan sajian matematika dengan pengertian,
    5. menggunakan kosakata/bahasa, notasi struktur secara matematika untuk menyajikan idea menggambarkan hubungan, dan pembuatan model,

MATHEMATICAL COMMUNICATION

6. memahami, menafsirkan dan menilai idea yang disajikan secara lisan, dalam tulisan atau dalam bentuk visual,
7. mengamati dan membuat dugaan, merumuskan pertanyaan, mengumpulkan dan menilai informasi, dan
8. menghasilkan dan menyajikan argumen yang meyakinkan.

MATHEMATICAL COMMUNICATION Romberg dan Chair (2005):

- menghubungkan benda nyata, gambar, dan diagram ke dalam idea matematika; menjelaskan idea, situasi dan relasi matematik secara lisan atau tulisan dengan benda nyata, gambar, grafik dan aljabar; menyatakan peristiwa sehari-hari dalam bahasa atau simbol matematika; mendengarkan, berdiskusi, dan menulis tentang matematika; membaca dengan pemahaman suatu presentasi matematika tertulis, membuat konjektur, menyusun argumen, merumuskan definisi dan generalisasi; menjelaskan dan membuat pertanyaan tentang matematika yang telah dipelajari.

LIMA ASPEK KOMUNIKASI Baroody (1993)

1. Representasi diartikan sebagai bentuk baru dari hasil translasi suatu masalah atau idea, atau translasi suatu diagram dari model fisik ke dalam simbol atau kata-kata (NCTM, 1989). Misalnya bentuk perkalian ke dalam model kongkrit, suatu diagram ke dalam bentuk simbol. Representasi dapat membantu anak menjelaskan konsep atau idea dan memudahkan anak mendapatkan strategi pemecahan. Selain itu dapat meningkatkan fleksibelitas dalam menjawab soal matematika (Baroody, 1993).

LIMA ASPEK KOMUNIKASI Baroody (1993)

2. Mendengar (*listening*), dalam proses diskusi aspek mendengar salah satu aspek yang sangat penting. Kemampuan siswa dalam memberikan pendapat atau komentar sangat terkait dengan kemampuan dalam mendengarkan topik-topik utama atau konsep esensial yang didiskusikan. Siswa sebaiknya mendengar dengan hati-hati manakala ada pertanyaan dan komentar dari temannya. Baroody (1993) mengatakan mendengar secara hati-hati terhadap pertanyaan teman dalam suatu grup juga dapat membantu siswa mengkonstruksi lebih lengkap pengetahuan matematika dan mengatur strategi jawaban yang lebih efektif.

LIMA ASPEK KOMUNIKASI Baroody (1993)

3. Membaca (*reading*), kemampuan membaca merupakan kemampuan yang kompleks, karena di dalamnya terkait aspek mengingat, memahami, membandingkan, menemukan, menganalisis, mengorganisasikan, dan akhirnya menerapkan apa yang terkandung dalam bacaan.
4. Diskusi (*Discussing*), merupakan sarana bagi seseorang untuk dapat mengungkapkan dan merefleksikan pikiran-pikirannya berkaitan dengan materi yang diajarkan. Gokhale (Hulukati, 2005) menyatakan aktivitas siswa dalam diskusi tidak hanya meningkatkan daya tarik antara partisipan tetapi juga dapat meningkatkan cara berpikir kritis. Baroody (1993) menguraikan beberapa kelebihan dari diskusi antara lain: (a) dapat mempercepat pemahaman materi pembelajaran dan kemahiran menggunakan strategi, (b) membantu siswa mengkonstruksi pemahaman matematik, (c) menginformasikan bahwa para ahli matematika biasanya tidak memecahkan masalah sendiri-sendiri tetapi membangun idea bersama pakar lainnya dalam satu tim, dan (4) membantu siswa menganalisis dan memecahkan masalah secara bijaksana.

LIMA ASPEK KOMUNIKASI Baroody (1993)

5. Menulis (*writing*), kegiatan yang dilakukan dengan sadar untuk mengungkapkan dan merefleksikan pikiran, dipandang sebagai proses berpikir keras yang dituangkan di atas kertas. Menulis adalah alat yang bermanfaat dari berpikir karena siswa memperoleh pengalaman matematika sebagai suatu aktivitas yang kreatif. Sedangkan Manzo (Hulukati, 2005) menulis dapat meningkatkan taraf berpikir siswa kearah yang lebih tinggi (higher order thinking).

- Penalaran matematik adalah suatu proses pencapaian kesimpulan logis berdasarkan fakta dan sumber yang relevan. Secara garis besar penalaran terdiri dari dua jenis yaitu penalaran induktif dan penalaran deduktif. Kemampuan penalaran matematik lebih banyak digunakan dalam mencari kesimpulan atau membuktikan atau menguji suatu hipotesis. Dalam pembelajaran matematika, kemampuan penalaran perlu terus dikembangkan. Kejadian atau proses matematika harus dipahami siswa melalui proses penalaran yang benar, dan semua tindakan yang dilakukan harus didasarkan pada alasan yang cukup dan masuk akal.

Mathematical Reasoning

- indikator-idikator penalaran matematik meliputi, (Sumarmo,1997)menarik kesimpulan logis; memberi penjelasan dengan menggunakan model; menggunakan pola dan hubungan untuk menganalisis situasi matematik, menarik analogi dan generalisasi, menyusun dan menguji konjektur; memberikan contoh penyangkal; mengikuti aturan inferensi; memeriksa validitas argumen; menyusun argumen yang valid; menyusun pembuktian langsung, tak langsung dan menggunakan induksi matematik.

Indikator dari penalaran Ross (2006) :

- Memberikan alasan mengapa sebuah jawaban atau pendekatan terhadap suatu masalah adalah masuk akal
- Menganalisis pernyataan-pernyataan dan memberikan contoh yang dapat mendukung atau yang bertolak belakang
- Menggunakan data yang mendukung untuk menjelaskan mengapa cara yang digunakan serta jawaban adalah benar
- Membuat dan mengevaluasi kesimpulan umum berdasarkan atas penyelidikan dan penelitian
- Meramalkan atau menggambarkan kesimpulan atau putusan dari informasi yang sesuai

Indikator dari penalaran Ross (2006) :

- Mempertimbangkan validitas dari argumen dengan menggunakan cara berpikir induktif dan deduktif
- Ross (Rohayati, 2003:6) mengungkapkan indikator dari penalaran adalah sebagai berikut:
- Memberikan alasan mengapa sebuah jawaban atau pendekatan terhadap suatu masalah adalah masuk akal
- Menganalisis pernyataan-pernyataan dan memberikan contoh yang dapat mendukung atau yang bertolak belakang

Indikator dari penalaran Ross (2006) :

- Menggunakan data yang mendukung untuk menjelaskan mengapa cara yang digunakan serta jawaban adalah benar
- Membuat dan mengevaluasi kesimpulan umum berdasarkan atas penyelidikan dan penelitian
- Meramalkan atau menggambarkan kesimpulan atau putusan dari informasi yang sesuai
- Mempertimbangkan validitas dari argumen dengan menggunakan cara berpikir induktif dan deduktif

Strategi

- Strategi untuk mengembangkan kemampuan penalaran matematiknya (Bright (1999)
- (1) belajar matematika dengan cara yang berbeda-beda,
- (2) mempelajari materi kurikulum yang dirancang untuk siswa,
- (3) berinteraksi (berkomunikasi) dengan mereka.

Analogi

- Analogi dapat diartikan sebagai suatu ‘kesamaan struktur’ dari dua masalah yang bentukya berbeda. Misalkan A adalah masalah geometri tiga dimensi yang melibatkan garis dan bidang sedangkan B adalah masalah dalam geometri dua dimensi yang pengerjaanya melibatkan titik dan garis, atau misalkan A adalah masalah mengenai fungsi real satu peubah, dan B adalah masalah mengenai fungsi real dua peubah.

Analogi

- Dalam aljabar, kemampuan analogi dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa konjektur berikut benar: Jika $a, b, c,$ dan d adalah bilangan real berbeda antara 0 dan 1, maka berlaku $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) >1-a-b-c-d.$ Jika dipilih dua bilangan real a dan b antara 0 dan 1 yang berbeda, maka dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $(1-a)(1-b)> 1-a-b,$ ini jelas karena $a.b >0,$ sehingga pertidaksamaan $(1-a)(1-b)=1-a-b+a.b > 1-a-b,$ benar. Selanjutnya proses tersebut dapat diperluas untuk beberapa bilangan real berbeda lainnya, sehingga didapat pola umum bahwa ketaksamaan tersebut berlaku untuk n buah biangan real berbeda.