DEFICIENCY DUA PENAKSIR PADA DISTRIBUSI KELUARGA EKSPONENSIAL DENGAN SATU PARAMETER

Oleh:
Dr. Dadang Juandi, M.Si
Rani G Yuniar, S.Si.

Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI
JL. DR. Setiabudhi 229, Bandung 40154

ABSTRAK

Konsep *deficiency* diperkenalkan oleh Hodges dan Lehmann (Hodges dan Lehmann, 1970) yang digunakan untuk membandingkan dua buah penaksir pada sampel berukuran besar. *Deficiency* adalah suatu besaran yang diperoleh dari hasil membandingkan *mean square error* (MSE) dua buah penaksir pada sampel berukuran besar. MSE penaksir Maksimum Likelihood dan penaksir UMVU dari fungsi yang *estimable* $g \;\; \theta$ diperoleh pada order diatas n^{-2}, dimana *n* merupakan ukuran sampel. Distribusi yang diangkat pada karya tulis ini adalah distribusi keluarga eksponensial dengan satu parameter θ.

Kata kunci: *Distribusi Keluarga Eksponensial, penaksir Maksimum Likelihood, penaksir UMVU.*

1. Pendahuluan

Dalam statistika, sebuah penaksir adalah sebuah fungsi dari sampel data observasi yang digunakan untuk menaksir parameter populasi yang tidak diketahui. Ada dua jenis penaksir, yaitu penaksir titik dan penaksir interval. Dalam penaksiran titik, kita mencoba langsung menaksir suatu nilai. Penaksiran itu menginginkan agar suatu parameter ditaksir dengan memakai satu bilangan saja. Misalnya kita menaksir parameter-parameter μ, σ atau *p* dengan memakai statistik-statistik $\bar{x}$, s atau x/n.

Penaksiran seperti ini dapat kita ibaratkan sebagai penembakan titik tertentu dengan panah. Sudahlah pasti bahwa kita akan sering sekali tidak mengenai titik ini. Kebanyakan dari panah kita itu akan berserak di sekitar titik tadi, ada yang sampai, ada yang terlalu jauh, ada yang terlalu kekiri ada yang terlalu ke kanan. Sangat sulit bagi kita untuk tepat mengenainya. Oleh karena itu, kita hanyalah berusaha agar penaksir itu tidak terlalu sering melewati atau tidak sampai kepada yang ditaksir. Kita berusaha agar tersebarnya penaksir-penaksir yang dibuat tidak terlalu jauh dari yang ditaksir.

Pada umumnya dapat dikatakan disini, bahwa probabilitas suatu penaksiran titik untuk tepat sekali sangat kecil dan ketidakakurasian sebuah penaksir dalam menaksir disebut fungsi resiko. Fungsi resiko dalam setiap penaksiran besarnya berbeda-beda, bergantung pada ukuran sampel. Biasanya semakin besar ukuran sampel yang digunakan maka resikonya pun akan semakin kecil. Hal ini dikarenakan semakin besar ukuran sampel maka informasi yang diperlukan tentang yang akan ditaksir semakin tersedia.

Teori ukuran sampel besar adalah teori dimana sampel yang digunakan yaitu vektor $X = \;\; X_1, ..., X_n$ dengan *n* adalah anggota dari barisan yang berkorespodensi dengan $n = 1, 2, ...$ (atau secara umum $n = n_0, n_0 + 1, ...$ dengan kata lain $n \to \infty$). Secara matematis hasil dari penaksiran pada sampel besar berupa nilai limit. Pada aplikasinya, hasil limit ini digunakan untuk mengaproksimasi kondisi di mana *n* menjadi suatu nilai yang terbatas.

Pembahasaan *deficiency* merupakan bagian dari pembahasan teori sampel besar. Pada teori sampel besar dibahas bagaimana membandingkan penaksir yang berbeda. Karena tidak seperti pada sampel kecil, sampel besar memiliki beberapa hukum. *Deficiency* sendiri adalah suatu metode untuk membandingkan dua buah penaksir yang saling *asimtotically efficient*, dilihat dari nilai fungsi resikonya. Fungsi resiko disini dapat juga berupa nilai dari *mean square error* (MSE). Menurut Hodges dan Lehmann (1970) untuk mencari *deficiency* tersebut digunakan MSE dari kedua buah penaksir, yang diperoleh pada order diatas n^{-2} , di mana *n* adalah ukuran sampel.

penaksir yang dipilih adalah penaksir maksimum likelihood (ML), dan penaksir *uniformly minimum-variance unbiased* (UMVU/MVUE). Hal ini dikarenakan meski secara umum ML dan UMVU merupakan dua buah penaksir yang berbeda, namun kedua penaksir tersebut dapat diasumsikan identik, jika parameter natural dari distribusi keluarga eksponensial adalah θ [Greenwood and Nikulin, 1996].

Karena adanya asumsi identik dari kedua penaksir ini, maka dapat dibandingkan mana dari kedua penaksir tersebut yang lebih *deficient*, dilihat dari nilai MSE nya. Menurut [Gudi dan Nagnur, 2004], jika *deficiency* bernilai positif maka menunjukan bahwa penaksir ML *deficient* terhadap penaksir UMVU, dan jika *deficiency* bernilai negatif menunjukan bahwa penaksir UMVU *deficient* terhadap penaksir ML.

2. Tinjauan Pustaka

Diketahui fungsi kepadatan peluang dari distribusi keluarga eksponensial adalah

$$f(x;\theta) = \exp\{\phi_1(\theta)T(x) + \phi_2(\theta) + Q(x)\}; \qquad x \in \Re, \theta \in \Theta \tag{2.1}$$

Misalkan variabel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid pada (2.1). Dan misalkan $g(\theta)$ adalah fungsi yang estimable untuk θ. Maka berlaku asumsi berikut:

a. Persamaan (2.1) memenuhi kondisi
   $\eta(\theta)\phi_1'(\theta) + \phi_2'(\theta) = 0$ dan $\phi_1'(\theta) > 0$, $\forall \theta \in \Theta$.
   dimana $\eta(\theta)$ adalah suatu fungsi dari θ.
b. θ^* adalah statistik cukup untuk distribusi keluarga eksponensial, dimana $\theta^* = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} T(x_i)$
   dan $E(\theta^*) = \eta(\theta)$
c. Fungsi log-likelihood $l(\theta) = \log\left[L_n(\underline{x},\theta)\right]$ adalah unimodal dan penaksir maksimum Likelihood yang merupakan fungsi dari θ^* adalah unik. Sehingga $g(\theta^*)$ adalah penaksir Maksimum Likelihood dari $g(\theta)$ (Zehna, 1966).
d. $U(\theta^*)$ adalah penaksir UMVU dari $g(\theta)$, dimana penaksir UMVU adalah fungsi dari θ^*.
e. Penaksir Maksimum Likelihood $g(\theta^*)$ dan penaksir UMVU $U(\theta^*)$ dapat menjadi identik, dengan kata lain $g(\theta^*) = U(\theta^*)$, jika parameter natural dari distribusi keluarga eksponensial adalah θ [Greenwood and Nikulin, 1996]. Secara umum ML dan UMVU berbeda.
f. Fungsi $g(\theta^*)$ dan $U(\theta^*)$ konvergen pada ekspansi taylor, untuk semua titik dalam Θ.
g. Diasumsikan terdapat turunan dari $g(\theta^*)$ dan $U(\theta^*)$ pada ekspansi taylor
h. Diasumsikan penaksir Maksimum likelihood *asymptotically efficient*, yaitu mencapai batas bawah dari Cramer-Rao ketika ukuran sampel besar dan menuju tak hingga. Hal ini berarti tidak ada penaksir tak bias yang memiliki nilai MSE lebih kecil dibanding penaksir Maksimum Likelihood.
i. Untuk setiap penaksir yang *asymptotically efficient*, berlaku $\sqrt{n}(\theta^* - \theta) \xrightarrow{\ell} N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$
j. Jika I adalah informasi Fisher seperti pada definisi 2.16, maka menurut (Gudi dan Nagnur, 2004) $\frac{1}{I}$ memiliki turunan terhadap θ, yaitu $d/d\theta(1/I) = -(2K_{11} + K_{30})/I^2$

Dari asumsi diatas, misalkan $l'(\theta)$ adalah turunan pertama dari $l(\theta)$ terhadap θ. Seperti diketahui jika pada persamaan likelihood $l'(\theta)=0$, maka penaksiran tersebut memiliki solusi θ^*, yang memiliki peluang mendekati θ. Hal ini juga membuat fungsi likelihood maksimal.

Dari asumsi (f), (g) dan (h) dan menggunakan hasil dari (Gudi dan Nagnur, 2004) maka diperoleh

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\theta^*-\theta\right) &= \frac{l'(\theta)}{\sqrt{n}I}+\frac{l'(\theta)\left(l''(\theta)+nI\right)}{n^{3/2}I^2}+\frac{\left(l'(\theta)\right)^2 l'''(\theta)}{2n^{5/2}I^3}+O\left(n^{-5/2}\right)\\ &= \frac{l'(\theta)}{\sqrt{n}I}+\frac{l'(\theta)\left(l''(\theta)+nI\right)}{n^{3/2}I^2}+\frac{\left(l'(\theta)\right)^2 E\left(l'''(\theta)\right)}{2n^{5/2}I^3}\\ &\quad+\frac{\left(l'(\theta)\right)^2\left[l'''(\theta)-E\left(l'''(\theta)\right)\right]}{2n^{5/2}I^3}+O\left(n^{-5/2}\right)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Misalkan

$$K_{ij}=E\left[\left\{\frac{\partial\log f(X,\theta)}{\partial\theta}\right\}^i\left\{\frac{\partial^2\log f(X,\theta)}{\partial\theta}+I\right\}^j\right] \tag{2.3}$$

Maka,

$$E\left[\left(l'(\theta)\right)^i\left(l''(\theta)+nI\right)^j\right]=nK_{ij} \tag{2.4}$$

Dengan menggunakan hasil pada (Cox dan Hinkley, 1974)

$$\begin{aligned}E\left[l'''(\theta)\right] &= -3E\left[l'(\theta)\left(l''(\theta)+nI\right)\right]-E\left[l'(\theta)\right]^3\\ &= -n\left(3K_{11}+K_{30}\right)\end{aligned}$$

Maka persamaan (2.2) dapat dirubah menjadi

$$\sqrt{n}\left(\theta^*-\theta\right)=\frac{l'(\theta)}{\sqrt{n}I}+\frac{l'(\theta)\left(l''(\theta)+nI\right)}{n^{3/2}I^2}-\frac{\left(l'(\theta)\right)^2\left(3K_{11}+K_{11}\right)}{2n^{3/2}I^3}+O\left(n^{-5/2}\right) \tag{2.5}$$

Dari (2.5) dapat dicari pendekatan moment dari $\sqrt{n}\left(\theta^*-\theta\right)$ pada order ke n^{-2}. Misalkan $\mu_i=E\left[\theta^*-\theta\right]^i$; *untuk i= 1, 2, 3, 4*. Dengan menggunakan hasil pada (Aithal, 1992; Gudi, 2002; Rao, 1961) diperoleh

1. $\mu_0 = 1$ (2.6)
2. $\mu_1 = E\left(\theta^*-\theta\right)$

$$= \frac{b(\theta)}{n}=-\frac{K_{11}+K_{30}}{2nI^2}+O\left(n^{-2}\right) \tag{2.7}$$

3. $\mu_2 = E\left(\theta^*-\theta\right)^2$

$$= \frac{1}{nI}+\frac{2b'(\theta)}{n^2I}+\frac{\psi(\theta)}{n^2}+\frac{\left[b(\theta)\right]^2}{n^2}+O\left(n^{-3}\right) \tag{2.8}$$

4. $\mu_3 = E\left(\theta^*-\theta\right)^3$

$$= -\frac{9K_{11}+7K_{30}}{2n^2I^3}+O\left(n^{-3}\right) \tag{2.9}$$

5. $\mu_4 = E\left(\theta^*-\theta\right)^4$

$$= \frac{3}{n^2I^2}+O\left(n^{-3}\right) \tag{2.10}$$

Dimana $\frac{b(\theta)}{n}$ adalah order bias pertama dari penaksir θ^*, $b'(\theta)$ adalah turunan dari $b(\theta)$ terhadap θ, $\psi(\theta)$ adalah koefisien dari n^{-2} pada varians dari penaksir $\hat{\theta}$ (yaitu, penaksir θ^* dikoreksi untuk bias order yang pertama) dan ditunjukan dengan

$$\psi(\theta) = \left[\frac{2\left[IK_{02} - K_{11}^2\right] + \left[K_{11} + K_{30}\right]^2}{2I^4}\right]$$

Sehingga,

$$\operatorname{var}(\theta^*) = E(\theta^* - \theta)^2 - \left(E(\theta^* - \theta)\right)^2 \tag{2.11}$$

$$\operatorname{var}(\theta^*) = \left(\frac{1}{nI} + \frac{2b'(\theta)}{n^2 I} + \frac{\psi(\theta)}{n^2} + \frac{\left[b(\theta)\right]^2}{n^2} + O(n^{-3})\right) - \left(\frac{b(\theta)}{n} + O(n^{-2})\right)^2$$

$$= \frac{1}{nI} + \frac{2b'(\theta)}{n^2 I} + \frac{\psi(\theta)}{n^2} + O(n^{-3}) \tag{2.12}$$

$$MSE(\theta^*) = \frac{1}{nI} + \frac{2b'(\theta)}{n^2 I} + \frac{\psi(\theta)}{n^2} + \frac{\left(b(\theta)\right)^2}{n^2} + O(n^{-3}) \tag{2.13}$$

3. Perhitungan *Means Square Error* untuk Penaksir Maximum Likelihood dan Penaksir UMVU

Seperti telah disebutkan sebelumnya, *deficiency* ditentukan dari nilai MSE dari kedua penaksir. Maka langkah berikut adalah menentukan nilai MSE dari kedua buah penaksir.

Perhitungan Means Square Error untuk Penaksir Maximum Likelihood

Dengan menggunakan asumsi bahwa terdapat turunan dari $g(\theta^*)$ dan $U(\theta^*)$ pada ekspansi taylor, maka dapat diperlihatkan rangkaian Ekspansi Taylor dari $g(\theta^*)$ diberikan oleh

$$g(\theta^*) = g(\theta) + \frac{g'(\theta)(\theta^* - \theta)}{1!} + \frac{g''(\theta)(\theta^* - \theta)^2}{2!} + \frac{g'''(\theta)(\theta^* - \theta)^3}{3!} + \frac{g''''(\theta)(\theta^* - \theta)^4}{4!} + \cdots \tag{3.1}$$

Dimana $g^{(i)}(\theta), i = 1, 2, \ldots$; adalah turunan ke-*i* dari $g(\theta)$ terhadap θ.

Lemma 1

Order bias yang pertama dari penaksir $g(\theta^*)$ adalah

$$E\left[g(\theta^*) - g(\theta)\right] = \left(g'(\theta)\right)\left[-\frac{K_{11} - K_{30}}{2nI^2}\right] + \left(g''(\theta)\right)\left[\frac{1}{2nI}\right] \tag{3.2}$$

Teorema 1

Varians dari penaksir Maksimum likelihood $g(\theta^*)$ adalah

$$\operatorname{var}\left[g(\theta^*)\right] = \left(g'(\theta)\right)^2\left[\operatorname{var}(\theta^*)\right] - \left(g'(\theta)\right)\left(g''(\theta)\right)\left[\frac{4K_{11} + 3K_{30}}{n^2 I^3}\right] + \left(g''(\theta)\right)^2\left[\frac{1}{2n^2 I^2}\right] + \left(g'(\theta)\right)\left(g'''(\theta)\right)\left[\frac{1}{n^2 I^2}\right] + O(n^{-3}) \tag{3.3}$$

Sehingga dari teorema tersebut diperoleh nilai dari MSE dari penaksir Maksimum likelihood $g(\theta^*)$ yaitu,

$$MSE\left[g(\theta^*)\right] = \{g'(\theta)\}^2\left[\frac{1}{nI}+\frac{2b'(\theta)}{n^2I}+\frac{\psi(\theta)}{n^2}+\frac{(K_{11}+K_{30})^2}{4n^2I^2}\right]-\left[g'(\theta)g''(\theta)\right]$$

$$\left[\frac{4K_{11}+3K_{30}}{n^2I^3}+\frac{K_{11}+K_{30}}{2n^2I^3}\right]+\{g''(\theta)\}^2\left[\frac{1}{2n^2I^2}+\frac{1}{4n^2I^2}\right]$$

$$+g'(\theta)g'''(\theta)\left[\frac{1}{n^2I^2}\right] \tag{3.4}$$

Perhitungan Means Square Error untuk Penaksir UMVU

Misalkan $U(\theta^*)$ adalah penaksir UMVU dari $g(\theta)$, dengan asumsi $U(\theta^*)$ konvergen terhadap ekspansi Taylor, maka

$$U(\theta^*) = U(\theta)+\frac{U'(\theta)(\theta^*-\theta)}{1!}+\frac{U''(\theta)(\theta^*-\theta)^2}{2!}+\frac{U'''(\theta)(\theta^*-\theta)^3}{3!}$$

$$+\frac{U''''(\theta)(\theta^*-\theta)^4}{4!}+\cdots \tag{3.5}$$

Dimana $U^{(i)}(\theta), i=1,2,\ldots;$ adalah turunan ke-i dari $U(\theta)$ terhadap θ. Perhitungan MSE dari penaksir UMVU $U(\theta^*)$ dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.5).

Teorema 2

Mean Square Error (MSE) dari penaksir UMVU $U(\theta^*)$ adalah

$$MSE\left[U(\theta^*)\right] = \operatorname{var}\left[U(\theta^*)\right] = E\left[U(\theta^*) - g(\theta)\right]^2$$

$$= \{g'(\theta)\}^2\left[\frac{1}{nI}+\frac{\psi(\theta)}{n^2}\right]+2\{g'(\theta)\}\{g''(\theta)\}\left[-\frac{K_{11}+K_{30}}{n^2I^3}\right]$$

$$+\{g''(\theta)\}^2\left[\frac{1}{2n^2I^2}\right]+O(n^{-3}) \tag{3.6}$$

Perhitungan *Deficiency* dari Penaksir Maksimum Likelihood terhadap Penaksir UMVU

Setelah diperoleh hasil $MSE\left[g(\theta^*)\right]$ dan $MSE\left[U(\theta^*)\right]$ maka dapat dicari nilai dari *deficiency*. Berikut akan ditunjukan nilai *deficiency* dari penaksir maksimum Likelihood terhadap penaksir UMVU

Teorema 3

Deficiency dari penaksir maksimum Likelihood $g(\theta^*)$ terhadap penaksir UMVU $U(\theta^*)$ ditunjukan sebagai berikut :

$$D_{HL}\left[g(\theta^*), U(\theta^*)\right]$$

$$= -\left[\frac{7K_{11}+5K_{30}}{2I^2}\right]\frac{g''(\theta)}{g'(\theta)}+\frac{1}{I}\left[\frac{g'''(\theta)}{g'(\theta)}+\frac{1}{4}\left\{\frac{g''(\theta)}{g'(\theta)}\right\}^2\right]+\left[2b'(\theta)+I\left[b(\theta)\right]^2\right] \tag{3.7}$$

4. *Deficiency* dari Penaksir Maksimum Likelihood terhadap penaksir UMVU pada persamaaan $g(\theta),\theta$, dan turunannya.

Pada bagian ini,, akan ditunjukan nilai *deficiency* dari penaksir maksimum Likelihood terhadap penaksir UMVU pada persamaan $g(\theta),\theta$, dan turunannya.

Karena,

$$\int \exp\left(\phi_1(\theta)T(x)+\phi_2(\theta)+Q(x)\right)dx = 1 \tag{4.1}$$

Dengan asumsi,

$\eta(\theta)\phi_1'(\theta)+\phi_2'(\theta)=0$ dan $\phi_1'(\theta)>0$, untuk setiap $\theta\in\Theta$

Maka,

$$\left[-\frac{\phi_2'(\theta)}{\phi_1'(\theta)}\right]=\eta(\theta) \tag{4.2}$$

Sehingga, dengan menggunakan hasil pada (Gudi dan Nagnur, 2004), diperoleh

$$\begin{aligned}
E\left[T(X)\right] &= \int T(x)\exp\left(\phi_1(\theta)T(x)+\phi_2(\theta)+Q(x)\right)dx \\
&= \eta(\theta) && (4.3)\\
E\left[T(X)\right]^2 &= \int \left(T(x)\right)^2\exp\left(\phi_1(\theta)T(x)+\phi_2(\theta)+Q(x)\right)dx \\
&= \left(\eta(\theta)\right)^2+\frac{\eta'(\theta)}{\phi_1'(\theta)} && (4.4)\\
E\left[T(X)\right]^3 &= \int \left(T(x)\right)^3\exp\left(\phi_1(\theta)T(x)+\phi_2(\theta)+Q(x)\right)dx \\
&= \left(\eta(\theta)\right)^3+\frac{3\eta(\theta)\eta'(\theta)}{\left[\phi_1'(\theta)\right]}-\frac{\eta'(\theta)\left[\phi_1''(\theta)\right]}{\left[\phi_1'(\theta)\right]^3}+\frac{\eta''(\theta)}{\left[\phi_1'(\theta)\right]^2} && (4.5)
\end{aligned}$$

dan

$$I=E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\log f(X;\theta)\right]\right]=\phi_1'(\theta)\,\eta'(\theta) \tag{4.6}$$

$$K_{ij}=\left(\phi_1'(\theta)\right)^i\left(\phi_1''(\theta)\right)^j E\left[T(X)-\eta(\theta)\right]^{i+j},\forall i,j. \tag{4.7}$$

Dengan menggunakan (4.3) dan (4.4) diperoleh nilai dari $\operatorname{var}\left[T(x)\right]$ yaitu,

$$\operatorname{var}\left[T(x)\right]=\frac{\eta'(\theta)}{\left[\phi_1'(\theta)\right]} \tag{4.8}$$

Dari (4.7) diperoleh

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \left(\phi_1'(\theta)\right)^1\left(\phi_1''(\theta)\right)^1 E\left[T(X)-\eta(\theta)\right]^2\\
&= \left(\phi_1'(\theta)\right)\left(\phi_1''(\theta)\right)\left[E\left[T(X)\right]^2-2E\left[T(X)\right]\eta(\theta)+\left(\eta(\theta)\right)^2\right]\\
&= \left(\phi_1'(\theta)\right)\left(\phi_1''(\theta)\right)\left[\left(\eta(\theta)\right)^2+\frac{\eta'(\theta)}{\phi_1'(\theta)}-2\left(\eta(\theta)\right)^2+\left(\eta(\theta)\right)^2\right]\\
&= \left[\phi_1''(\theta)\right]\eta'(\theta) && (4.9)\\
K_{02} &= \left(\phi_1'(\theta)\right)^0\left(\phi_1''(\theta)\right)^2 E\left[T(X)-\eta(\theta)\right]^2
\end{aligned}$$

$$= \phi_1'' \; \theta \;^2 \left[E\left[T \;\; X \;\right]^2 - 2E\left[T \;\; X \;\right]\eta \;\; \theta \; + \; \eta \;\; \theta \;\;^2 \right]$$

$$= \phi_1'' \; \theta \;^2 \left[\; \eta \;\; \theta \;\;^2 + \frac{\eta' \;\; \theta}{\phi_1' \;\; \theta} - 2 \;\; \eta \;\; \theta \;\;^2 + \; \eta \;\; \theta \;\;^2 \right]$$

$$= \left[\phi_1'' \;\; \theta \;\right] \frac{\eta' \;\; \theta}{\left[\phi_1' \;\; \theta \;\right]} \qquad (4.10)$$

dan

$$K_{30} \quad = \phi_1' \;\; \theta \;\;^3 \;\; \phi_1'' \;\; \theta \;\;^0 \; E\left[T \;\; X \;\; - \eta \;\; \theta \;\right]^3$$

$$= \phi_1' \;\; \theta \;\;^3 \left[E\left[T \;\; X \;\right]^3 - 3E\left[T \;\; X \;\right]^2 \eta \;\; \theta \;\; + 3E\left[T \;\; X \;\right]\eta \;\; \theta \;^2 - \; \eta \;\; \theta \;\;^3 \right]$$

$$= \phi_1' \;\; \theta \;\;^3 \left[\left[\; \eta \;\; \theta \;\;^3 + \frac{3 \;\; \eta \;\; \theta \;\;\;\; \eta' \;\; \theta}{\left[\phi_1' \;\; \theta \;\right]} - \frac{\eta' \;\; \theta \;\; \left[\phi_1'' \;\; \theta \;\right]}{\left[\phi_1' \;\; \theta \;\right]^3} + \frac{\eta'' \;\; \theta}{\left[\phi_1' \;\; \theta \;\right]^2} \right.\right.$$

$$\left. -3\eta \;\; \theta \;^2 \eta \;\; \theta \;\; - \frac{3\eta \;\; \theta \;\; \eta' \;\; \theta}{\phi_1' \;\; \theta} + 3\eta \;\; \theta \;\; \eta \;\; \theta \;\;^2 - \eta \;\; \theta \;\;^3 \right]$$

$$= \left[-\phi_1'' \;\; \theta \;\right] \;\eta' \;\; \theta \;\;\; + \left[\phi_1' \;\; \theta \;\right] \;\eta'' \;\; \theta$$

$$= -K_{11} + \left[\phi_1' \;\; \theta \;\right] \;\eta'' \;\; \theta \qquad (4.11)$$

Dengan menggunakan beberapa persamaan diatas diperoleh,

$$b \;\; \theta \quad = -\frac{K_{11} + K_{30}}{2I^2}$$

$$= -\frac{\phi' \;\; \theta \;\; \eta'' \;\; \theta}{2\left[\phi_1' \;\; \theta \;\; \eta' \;\; \theta \;\right]^2}$$

$$= -\frac{\eta'' \;\; \theta}{2\left[\phi_1' \;\; \theta \;\right] \;\; \eta' \;\; \theta \;\;^2} \qquad (4.12)$$

Dan

$$\psi \;\; \theta \quad = \frac{2 \;\; IK_{02} - K_{11}{}^2 \;\; + \;\; K_{11} + K_{30} \;\;^2}{2I^4}$$

$$= \frac{\left[2\left[\phi_1' \;\; \theta \;\; \eta' \;\; \theta \;\right]\left[\phi_1'' \;\; \theta \;\; \frac{\eta' \;\; \theta}{\phi_1' \;\; \theta}\right] - \left[\phi_1'' \;\; \theta \;\; \eta' \;\; \theta \;\right] \right] + \eta' \;\; \theta}{2\left[\phi_1' \;\; \theta \;\right]^2 \;\; \eta' \;\; \theta \;\;^4}$$

$$= \frac{\eta'' \;\; \theta}{2\left[\phi_1' \;\; \theta \;\right]^2 \;\; \eta' \;\; \theta \;\;^4} \qquad (4.13)$$

Dengan menurunkan 2.2.12 terhadap θ, diperoleh

$$b' \;\; \theta \quad = -\left[\frac{\eta''' \;\; \theta \;\; 2\phi_1' \;\; \theta \;\;\; \eta' \;\; \theta \;\;^2 - \eta'' \;\; \theta \;\;\; 2\phi_1'' \;\; \theta \;\;\; \eta' \;\; \theta \;\;^2 + 4\phi_1' \;\; \theta \;\; \eta'' \;\; \theta \;\; \eta' \;\; \theta}{\left[2\phi_1' \;\; \theta \;\;\; \eta' \;\; \theta \;\;^2\right]^2} \right]$$

$$= \left[\frac{- \;\; \eta''' \;\; \theta \;\; 2\phi_1' \;\; \theta \;\;\; \eta' \;\; \theta \;\;^2 \;\; + 2\phi_1'' \;\; \theta \;\;\; \eta' \;\; \theta \;\;^2 \eta'' \;\; \theta \;\; + 4\phi_1' \;\; \theta \;\; \eta'' \;\; \theta \;^2 \eta' \;\; \theta}{\left[4\phi_1' \;\; \theta \;^2 \;\; \eta' \;\; \theta \;\;^4\right]} \right]$$

$$= -\frac{\eta'''(\theta)}{\left[\phi_1'(\theta)\right]\left(\eta'(\theta)\right)^2} + \frac{\eta''(\theta)\left[\phi_1''(\theta)\right]}{\left[\phi_1'(\theta)\right]^2\left(\eta'(\theta)\right)^2} + \frac{\left(\eta''(\theta)\right)^2}{4\left[\phi_1'(\theta)\right]\left(\eta'(\theta)\right)^3} \tag{4.14}$$

$$D_{HL}\left[g(\theta^*), U(\theta^*)\right] = g_1(\theta)\left[-\frac{\phi''(\theta)}{\left[\phi_1'(\theta)\right]^2\eta'(\theta)} - \frac{5}{2}\frac{\eta''(\theta)}{\left[\phi_1'(\theta)\right]\left(\eta'(\theta)\right)^2}\right] + g_2(\theta)\left[\frac{1}{\left[\phi_1'(\theta)\right]\eta'(\theta)}\right] + g_3(\theta) \tag{4.15}$$

Jika diperhatikan nilai *deficiency* pada persamaan (4.15) bergantung pada nilai $g(\theta), \phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \eta(\theta)$ dan turunannya terhadap θ

5. Ilustrasi

Untuk kepentingan ilustrasi, berikut akan diberikan sebuah contoh kasus. Variabel acak X dikatakan beristribusi geometris jika fungsi kepadatan peluangnya berbentuk:

$$f(x;\theta) = P(X = x) = (1-\theta)^x\theta, \quad x = 0,1,2,\ldots;0<\theta<1 \tag{5.1}$$

fungsi kepadatan peluang diatas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x,\theta) = \exp\left[\log(1-\theta)x + \log\theta\right] \tag{5.2}$$

statistik cukup yang lengkap berdasar pada suatu sampel berukuran n untuk keluarga eksponensial adalah $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$, dengan

$$\phi_1(\theta) = \log(1-\theta), \qquad \phi_2(\theta) = \log\theta, \qquad T(x) = x, \qquad Q(x) = 0 \tag{5.3}$$

Dari (5.3) diperoleh,

$$\phi_1'(\theta) = -\frac{1}{1-\theta}, \qquad \phi_2'(\theta) = \frac{1}{\theta}, \qquad \phi_1''(\theta) = -\frac{1}{(1-\theta)^2}$$

$$\eta(\theta) = \frac{1-\theta}{\theta}, \qquad \eta'(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}, \qquad \eta''(\theta) = \frac{2}{\theta^3} \tag{5.4}$$

Dengan mensubtitusi hasil dari (5.4) terhadap beberapa persamaan pada bagian b, diperoleh:

$$I = \frac{1}{\left[\theta^2(1-\theta)\right]}, \qquad K_{11} = \frac{1}{\left[\theta^2(1-\theta)\right]}, \qquad K_{30} = \frac{\theta-2}{\left[\theta^3(1-\theta)^2\right]}$$

$$(K_{11}+K_{30}) = -\frac{2}{\theta^3(1-\theta)}, \qquad (7K_{11}+5K_{30}) = \frac{12\theta-10}{\left[\theta^3(1-\theta)^2\right]}$$

$$b(\theta) = \theta(1-\theta), \; b'(\theta) = (1-2\theta) \tag{5.5}$$

Dengan menggunakan hasil pada bagian b, diperoleh

$$D_{HL}\left[g(\theta^*), U(\theta^*)\right] = -\left[\frac{7K_{11}+5K_{30}}{2I^2}\right] g_1(\theta) + \frac{g_2(\theta)}{I} + g_3(\theta)$$

$$= -\left[\frac{7K_{11}+5K_{30}}{2I^2}\right] g_1(\theta) + \frac{g_2(\theta)}{I} + \left[2b'(\theta) + I\,b(\theta)\right]$$

$$= -\left[\frac{12\theta-10}{\theta^3(1-\theta)^2}\right]\left[\frac{\theta^4(1-\theta)^2}{2}\right] g_1(\theta) + \theta^2(1-\theta)g_2(\theta)$$

$$+\left[2(1-2\theta) + \frac{1}{\theta^2(1-\theta)}\theta^2(1-\theta)^2\right]$$

$$= \theta(5-6\theta)g_1(\theta) + \theta^2(1-\theta)g_2(\theta) + (3-5\theta) \tag{5.6}$$

Jika fungsi yang *estimable* adalah

$$g(\theta) = (1-\theta)^m \tag{5.7}$$

Dapat ditunjukan bahwa penaksir Maksimum Likelihood untuk $g(\theta)$ adalah

$$g(\theta^*) = \left(\frac{T}{n+T}\right)^m, \tag{5.8}$$

Dari persamaan (5.7), diperoleh

$$g'(\theta) = m(1-\theta)^{m-1} \tag{5.9}$$

$$g''(\theta) = m(m-1)(1-\theta)^{m-2} \tag{5.10}$$

$$g'''(\theta) = m(m-1)(m-2)(1-\theta)^{m-3} \tag{5.11}$$

Maka,

$$g_1(\theta) = \left\{\frac{g''(\theta)}{g'(\theta)}\right\}$$

$$= \frac{m(m-1)(1-\theta)^{m-2}}{m(1-\theta)^{m-1}}$$

$$= \frac{m-1}{1-\theta} \tag{5.12}$$

$$g_2(\theta) = \left[\frac{g'''(\theta)}{g'(\theta)} + \frac{1}{4}(g_1(\theta))^2\right]$$

$$= \left[\frac{m(m-1)(m-2)(1-\theta)^{m-3}}{m(1-\theta)^{m-1}}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{m-1}{1-\theta}\right]^2$$

$$= \frac{(m-1)(m-2)}{(1-\theta)^2} + \frac{(m-1)^2}{4(1-\theta)^2}$$

$$= \frac{5m^2 - 14m + 9}{4(1-\theta)^2} \qquad (5.13)$$

Sehingga diperoleh

$$D_{HL}\left[g(\theta^*), U(\theta^*)\right]$$

$$= \theta(5-6\theta)\, g_1(\theta) + \theta^2(1-\theta)\, g_2(\theta) + (3-5\theta)$$

$$= \theta(5-6\theta)\left(\frac{m-1}{1-\theta}\right) + \theta^2(1-\theta)\left(\frac{5m^2-14m+9}{4(1-\theta)^2}\right) + (3-5\theta)$$

$$= 5\theta - 6\theta^2\left(\frac{m-1}{1-\theta}\right) + \left(\frac{1-\theta}{4(1-\theta)^2}\right)\left(5\theta^2 m^2 - 14\theta^2 m + 9\theta^2\right) + (3-5\theta)$$

$$= \frac{5\theta m - 5\theta - 6\theta^2 m + 6\theta^2}{1-\theta} + \frac{5\theta^2 m^2 - 14\theta^2 m + 9\theta^2}{4(1-\theta)} + (3-5\theta)$$

$$= \frac{12 - 32\theta + 20\theta^2 + 20\theta m - 20\theta - 24\theta^2 m + 24\theta^2 + 5\theta^2 m^2 - 14\theta^2 m + 9\theta^2}{4(1-\theta)}$$

$$= \frac{12 - 52\theta + 53\theta^2 + 20\theta m - 38\theta^2 m + 5\theta^2 m^2}{4(1-\theta)} \qquad (5.14)$$

Dari (5.14) terlihat bahwa, *deficiency* dari penaksir bergantung pada nilai *m* dan θ. Sekarang, dengan menggunakan program Microsoft Office Excel 2007, akan diperlihatkan nilai *deficiency* dari penaksir maksimum likelihood terhadap penaksir UMVU untuk beberapa nilai *m* dan θ.

Tabel 5.1

Nilai parameter θ	$D_{HL}\left[g(\theta^*), U(\theta^*)\right] = \frac{12 - 52\theta + 53\theta^2 + 20\theta m - 38\theta^2 m + 5\theta^2 m^2}{4(1-\theta)}$				
	Nilai *m*				
	1	2	3	4	5
0.01	2.9500	2.9001	2.8505	2.8011	2.7520
0.1	2.5000	2.0138	1.5556	1.1250	0.7222
0.2	2.0000	1.0625	0.2500	-0.4375	-1.0000
0.25	1.7500	0.6041	-0.3333	-1.0625	-1.5833
0.3	1.5000	0.1607	-0.8571	-1.5535	-1.9285
0.35	1.2500	-0.2644	-1.3076	-1.8798	-1.9807

0.4	1.0000	-0.6667	-1.6667	-2.0000	-1.6667
0.45	0.7500	-1.0397	-1.9090	-1.8579	-0.8863
0.5	0.5000	-1.3750	-2.0000	-1.3750	0.5000
0.55	0.2500	-1.6597	-1.8888	-0.4375	2.6944
0.6	0.0000	-1.8750	-1.5000	1.1250	6.0000
0.65	-0.2500	-1.9910	-0.7142	3.5803	10.8928
0.7	-0.5000	-1.9583	0.6667	7.3750	18.1667
0.75	-0.7500	-1.6875	3.0000	13.3125	29.2500
0.8	-1.0000	-1.0000	7.0000	23.0000	47.0000
0.85	-1.2500	0.5208	14.3333	40.1875	78.0833
0.9	-1.5000	4.1250	30.0000	76.1250	142.5000
0.95	-1.7500	16.0625	79.0000	187.0625	340.2500
0.99	-1.9500	115.6125	478.20000	1085.8130	1938.4500

Pada tabel 5.1 di atas, untuk nilai m dan θ yang diberikan, nilai positif dari *deficiency* menunjukan bahwa penaksir maksimum likelihood *deficient* terhadap penaksir UMVU, dan nilai negatif dari *deficiency* menunjukan bahwa penaksir UMVU *deficient* terhadap penaksir maksimum likelihood.

6. Daftar Pustaka

Aithal, B. U. (1992). *A Study of Higher Order Asymptotic Properties of the Estimators*. Tesis pada Shivaji University, Kolhapur, India: tidak diterbitkan

Aldrich, John (1997). "*R.A. Fisher and the making of maximum likelihood 1912-1922*". Paper pada sejarah dari Maksimum Likelihood

Cox, D. R., Hinkley, D. V. (1974). *Theoretical Statistics*. London: Chapman and Hall.

Greenwood, P. E., Nikulin, M. S. (1996). *A Guide to Chi-Squared Testing*. New York: John Wiley and Sons.

Gudi, S. V. (2002). *On Some Asymptotic Results in Estimation*. Tesis pada Karnatak University, Dharwad, India: tidak diterbitkan.

Gudi, V. S. V. and Nagnur, B. N. (2004). *Deficiency of Two Estimators in One-Parameter. Communication In Statistics.* Vol. 33, No. 8, pp. 1779–1800. New York: Marcel Dekker, Inc.

Herrhyanto, N. (2003). *Statistika Matematis Lanjutan. Bandung* : Pustaka Setia.

Hodges, J. L., Lehmann, E. L. (1970). *Deficiency. Ann. Math. Statist.*41(3):783–801

Johnson, D. (2004, November 22). *Minimum Mean Squared Error Estimators*. [online]. Tersedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Mean_squared_error. [11 April 2008]

Kay, Steven M. (1993). *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice Hall, Ch. 7.

Keener, Robert W. (2006). *Statistical Theory: Notes for a Course in Theoretical Statistics*. Springer, 47-48, 57-58.

Lehmann, E. L.; Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. New York: John Wiley and Sons.

Lehmann, E.L. (1983). *Theory of Point Estimation*. New York: John Wiley and Sons.

Rao, C. R. (1961). *Asymptotic efficiency and limiting information*. Proc. Fourth. Berk. Symp. Math. Statist. Prob. 1:531–546.

Sudjana. (1992). *Metoda Statistika Edisi Ke 5*. Bandung : Tarsito.

Utami Maolida, Dian. (2007). *Estimasi Varians Modifikasi Tau Kendall dengan Menggunakan Metode Delta dan Perluasan Persamaan Gamma Goodman-Kruskall*. Skripsi pada FPMIPA UPI Bandung. Bandung : tidak diterbitkan.

Zehna, P. W. (1966). *Invariance of maximum likelihood estimation. Ann. Math. Statist.* 37:744.1800.