

# PEMBELAJARAN KONSEP GRUP MENGGUNAKAN PROGRAM ISETL BERDASARKAN TEORI APOS

Oleh :  
**Elah Nurlaelah \*)**  
**Emma Carnia \*\*)**

## ABSTRAK

Pembelajaran Aljabar Abstrak (Struktur Aljabar) selama ini hanya bersifat konvensional dalam artian dosen yang memberikan materi, tugas- tugas dan diakhiri dengan ujian pada akhir semester. Kenyataannya Aljabar Abstrak merupakan salah satu mata kuliah yang sulit dan kurang menarik minat mahasiswa, sehingga kualitas dan kuantitas mahasiswa yang lulus tidak begitu memuaskan. Untuk itu diperlukan suatu inovasi pembelajaran yang dapat menarik minat mahasiswa. Salah satu alternatif yang ditawarkan untuk mengatasi hal tersebut adalah pembelajaran yang melibatkan keaktifan mahasiswa, baik secara fisik maupun secara mental. Hal tersebut diwujudkan dalam suatu bentuk pembelajaran yang menggunakan program ISETL yang didasarkan pada teori APOS.

Salah satu materi yang ada pada Aljabar Abstrak adalah Teori Grup, untuk menjelaskan konsep grup dengan pembelajaran ini dosen tidak secara langsung menjelaskan definisi dan sifat- sifat grup, melainkan dosen memberikan seperangkat lembar kerja yang harus dikerjakan oleh mahasiswa di Laboratorium Komputer. Tugas tersebut dimaksudkan untuk memberikan pengalaman yang mengarah pada konstruksi konsep grup, yang akan didiskusikan di kelas pada pertemuan berikutnya. Dengan inovasi pembelajaran ini diharapkan mahasiswa akan merasa tertarik untuk mempelajari Aljabar Abstrak dan pembelajaran akan menjadi lebih bermakna.

Kata kunci : Teori APOS (Action, Process, Object, Schema), Program ISETL, siklus ACE (Activities, Class discussion, Exercises).

## I. Pendahuluan

Mata kuliah Aljabar Abstrak ( Struktur Aljabar) merupakan salah satu mata kuliah pokok yang harus diikuti oleh seluruh mahasiswa Program Studi Matematika di seluruh Perguruan Tinggi . Tetapi pada umumnya mata kuliah ini merupakan salah satu mata kuliah yang sulit, karena memuat konsep – konsep yang Abstrak dan teorema – teorema yang perlu dibuktikan oleh mahasiswa. Sehingga mereka harus mempelajari konsep- konsep abstrak tersebut, memahami konsep –konsep dasar matematika, dan menggunakannya di dalam pembelajaran mata kuliah Aljabar Abstrak. Oleh karena itu kualitas dan kuantitas mahasiswa yang lulus tidak begitu memuaskan.

Dengan metoda pembelajaran konvensional biasanya dosen yang menyampaikan materi kepada mahasiswa, pemberian tugas- tugas, dan diakhiri dengan ujian tulis. Metoda pembelajaran ini dirasakan

---

\*) Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA – UPI

\*\*) Jurusan Matematika FMIPA - UNPAD

belum cukup. Dalam artian penguasaan konsep mahasiswa dalam mata kuliah ini tidak begitu mendalam dan mudah dilupakan, bahkan sering terjadi pemahaman konsep yang salah oleh mahasiswa. Sebagai contoh mahasiswa menganggap bahwa  $Z_n$  adalah subgrup dari  $Z$ , setiap koset adalah subgrup dan lain-lain. Hal ini disebabkan salah satunya karena mahasiswa menganggap bahwa setiap subset adalah subgrup tanpa memperhatikan operasinya yang harus sama.

Berdasarkan fenomena tersebut maka diperlukan suatu pengembangan pembelajaran yang dapat membantu mengatasi masalah di atas dan dapat membantu mahasiswa mengatasi kesulitan – kesulitan yang berkaitan dengan mata kuliah ini, sehingga dapat membantu meningkatkan pemahaman mereka dalam mempelajari materi – materi pada mata kuliah Aljabar Abstrak.

Metoda pembelajaran yang diharapkan adalah metoda pembelajaran yang dapat memberikan kesempatan kepada mahasiswa agar mereka dapat mengungkap seluruh potensi yang mereka miliki dan menarik minat dalam mengikuti mata kuliah Aljabar Abstrak. Dengan demikian mahasiswa akan termotivasi dalam mengikuti perkuliahan secara sungguh sungguh.

Metoda pembelajaran yang ditawarkan adalah pembelajaran dengan menggunakan program ISETL berdasarkan teori APOS. Ciri khas dari program ISETL adalah program ISETL mendukung konsep – konsep matematika (himpunan; nilai kebenaran suatu pernyataan (Boolean); logika matematika; fungsi sebagai suatu proses dan objek seperti algoritma atau himpunan – himpunan sebagai pasangan terurut ; dan lain – lain) yang kesemuanya menggunakan notasi matematika standar.

## II. Teori APOS

Teori APOS muncul dengan tujuan untuk memahami mekanisme *refleksi abstraksi* yang diperkenalkan oleh Piaget yang menjelaskan perkembangan berfikir logis untuk anak-anak. Ide tersebut kemudian dikembangkan untuk konsep matematika yang lebih luas, terutama untuk membentuk perkembangan berfikir logis bagi mahasiswa ( Dubinsky, 1991). Teori ini dimulai dengan hipotesis sebagai berikut;

“ An individual’s mathematical knowledge is her or his tendency to respond to mathematical problem situations by reflecting on them in a social context, constructing or reconstructing mathematical actions, processes and objects and organizing these in schemas to use in dealing with the situations.”

Konstruksi matematika pada hipotesis diatas merupakan konstruksi mental yang terdiri dari *action, processes, objects* dan diorganisasikan dalam suatu *schema*, selanjutnya disebut sebagai teori APOS. Berikut adalah penjelasan ringkas mengenai komponen-komponen dalam teori APOS;

**Action.** Suatu transformasi merupakan suatu *action* jika merupakan reaksi dari stimulus yang berasal dari luar (eksternal).

**Process.** Ketika seseorang merefleksikan *action* dan menginteriorisasikannya maka *action* dapat menjadi bagian dari dirinya (internal) yang dapat dikontrol.

**Object.** Ketika individu menyadari suatu *process* sebagai suatu totalitas, menyadari bahwa transformasi dapat dilakukan padanya dan juga dapat mengkonstruksi transformasi tersebut, maka *process* sudah menjadi suatu *object*.

**Schema .** Koleksi dari *process* dan *object* dapat diorganisasikan dalam suatu struktur untuk membentuk suatu *schema*. Beberapa *schema* dapat diperlakukan sebagai suatu *object* di dalam suatu *schema* yang lebih tinggi tingkatannya.

Teori APOS dapat digunakan secara langsung dalam membandingkan keberhasilan atau kegagalan individu yang berkaitan dengan konstruksi mental yang telah terbentuk pada suatu konsep matematika. Misalkan dua individu yang kelihatannya menguasai konsep tertentu secara sama dapat dideteksi lebih lanjut, jika seorang dapat menjelaskan lebih lanjut suatu konsep maka ia berada pada tingkat yang lebih baik daripada yang satunya. Selanjutnya teori APOS dapat membuat prediksi yang mantap jika kumpulan *action*, *process*, *object* dan *schema* tertentu telah dikonstruksi oleh seorang individu dengan baik, maka individu tersebut akan berhasil menggunakan konsep matematika tersebut dalam menyelesaikan suatu persoalan.

### III Desain Pembelajaran Berdasarkan Siklus ACE

Desain pembelajaran yang menunjang pembelajaran berdasarkan teori APOS adalah pengajaran berdasarkan siklus ACE (*Activities, Class discussion, Exercises*). Implementasi pengajaran berdasarkan siklus ACE adalah belajar menggunakan komputer dan belajar secara berkelompok. Mahasiswa dikelompokkan ke dalam grup secara tetap selama mengikuti perkuliahan Aljabar Abstrak, masing – masing kelompok terdiri dari 3 atau 4 orang. Proses belajar mengajar dilaksanakan sebanyak 2 kali dalam seminggu, terdiri dari satu kali di Laboratorium komputer dan satu kali dalam pertemuan kelas tanpa komputer. Di laboratorium komputer mahasiswa diberi lembar kerja yang berisi program ISETL yang harus dikerjakan, dimana program tersebut berkaitan dengan konsep – konsep yang belum diajarkan di kelas. Tujuan mengerjakan lembar kerja ini dimaksudkan untuk memberikan stimuli dan pengalaman yang mengarah pada konstruksi suatu konsep. Hasil yang diperoleh selama melakukan aktivitas di laboratorium akan di diskusikan di kelas pada pertemuan berikutnya.

Sementara diskusi kelas bertujuan untuk memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk mengemukakan temuan – temuan yang mereka peroleh di laboratorium. Berbagai masalah yang muncul dari setiap kelompok selama berada di laboratorium dikemukakan pada pertemuan kelas ini. Keuntungan dari diskusi kelas ini akan terjadi pertukaran informasi yang saling melengkapi sehingga mahasiswa mempunyai konsep yang sama. Sementara itu dosen berperan sebagai fasilitator dalam mengarahkan diskusi mahasiswa menuju ke arah konsep yang benar .

Untuk memantapkan konsep yang telah diperoleh, mahasiswa diberi tugas tambahan baik berupa tugas yang harus menggunakan komputer ataupun tugas yang berupa latihan – latihan soal.

#### IV. Beberapa Contoh Pembelajaran dengan Program ISETL.

Dibawah ini akan disajikan contoh pembelajaran dengan program ISETL yang berkaitan dengan konstruksi mental tertentu.

##### 1. Action .

Berikut adalah instruksi ISETL yang dikutip dari buku *Learning Abstract Algebra with ISETL*. Simbol `>` adalah prompt ISETL untuk menuliskan instruksi , sedangkan prompt `>>` jika instruksi ISETL belum lengkap.

```
> 7+8;
25;
> 13 * (-233.8);
-3039.400;
> 6 = 2 * 3;
true;
> 5 >= 2 * 3;
false;
> 17
>> + 237 - 460
>> *2
>> ;
-513;
> n := 37 mod 23;
> n;
14;
> (2 /= 3) and (( 5.2/3.1) > 0.9 );
> ( 3 <= 3 ) impl ( 3 = 2 + 1);
> ( 3 <= 3 ) impl ( not ( 3 = 2 +1));
> ( 3 > 3 ) impl ( 3 = 2 + 1);
> ( 3 > 3 ) impl ( not ( 3 = 2 + 1));
> 7 mod 4; 11 mod 4; -1 mod 4;
> ( 23 + 17 ) mod 3;
```

Mahasiswa diminta untuk mengerjakan instruksi- instruksi ini dengan tujuan supaya mereka terbiasa dengan perintah – perintah ISETL, tapi pada saat yang sama dalam instruksi itu terdapat konsep-konsep matematika yang membentuk tingkat *action*.

## 2. Process

Berikut adalah serangkaian instruksi untuk pasangan  $G$  (himpunan) dan  $op$  ( operasi ).

**$G$  adalah  $Z_{12}$  ( bilangan bulat modulo 12 ) dan  $op$  (operasi) adalah  $a_{12}$  ( penjumlahan modulo 12)**

Pada awalnya mahasiswa hanya diminta untuk mengekspresikannya dalam instruksi ISETL. Menuliskan kode semacam ini membantu mahasiswa mengkonstruksi ide operasi biner sebagai aksi.

Jawaban yang diharapkan dari mahasiswa adalah;

```
> Z12 := {0..11};
> G := Z12;
> a12 := | x, y -> ( x+y) mod 12 |;
```

selanjutnya mahasiswa menuliskan beberapa instruksi singkat untuk memeriksa bermacam – macam operasi seperti ketertutupan, assosiatif, elemen identitas dan elemen invers.

Jawaban yang diharapkan dari mahasiswa adalah;

```
> is_closed := func( G, a12);
>> return forall x, y in G | x .a12 y in G;
>> end;
> is_closed(G, a12);
true;
> is_assoc := func (G, a12);
>> return forall a, b, c in G | a .a12 ( b . a12 c) = ( a .a12 b) .a12 c;
>> end func;
> is_assoc ( G, a12);
true;
> has_identity := func( G, a12 );
>> return
>> exists e in G | ( forall a in G | e .a12 a = a);
>> end func;
> has_identity(G, a12);
```

```

true;
> identity := func(G, a12);
>> return choose e in G | ( forall x in G | e .a12 x = x and x . a12 e = x);
>> end func;
> identity(G, a12);
0;
> has_inverses := func(G, a12);
>> local e; e := identity(G, a12);
>> return
>> is_defined(e) and (forall a in G| (exists a' in G| a' .a12 a = e));
>> end func;
> has_inverses(G, a12);
true;
> inverses := func(G,a12,x);
>> local e;
>> e := identity (G, a12);
>> return choose x' in G| x' .a12 x = e;
>> end func;
> inverses(G,a12,7);
5;

```

Menggunakan program ini, dan memikirkan tentang apa yang dikerjakan ISETL sebagai contoh pada saat memeriksa

```
is_closed(G, a12);
```

mahasiswa berfikir tentang apa yang dikerjakan komputer ketika instruksi ini di *run*, membantu mahasiswa berpindah dari *aksi* ke *proses*.

### 3. Object

Objek didapatkan dengan encapsulasi *proses* dan seorang individu tampaknya seperti mengerjakan ini ketika yang bersangkutan merefleksikan pada situasi dimana ini diperlukan untuk menerapkan *action* ke dalam *proses yang dinamik*. Hal ini menimbulkan kesulitan karena aksi tidak dapat diaplikasikan ke dalam proses, sampai setelah proses diencapsulate ke dalam objek.

```

> Z12 := {0..11};
> G := Z12;
> op := |x, y -> (x + y) mod 12|;
> H := {0, 3, 6, 9 };
> coset := func(x);
>> return { ( x+h ) mod 12 : h in H};

```

```

>> end;
> coset(5); coset(6); coset(11);
{2, 5, 11, 8};
{9, 6, 3, 0};
{5, 2, 11, 8};
> %union { coset(x) : x in Z12};
{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 4, 3, 2, 1, 0};

```

#### 4. Schemas

Penggunaan ISETL untuk menolong mahasiswa membentuk skema dalam mengorganisasi kumpulan action, objek, proses dan skema yang lain adalah dengan menugaskan mahasiswa untuk menulis program atau instruksi komputer yang merupakan implementasi dari suatu konsep matematika yang selanjutnya menggunakan instruksi – instruksi itu untuk situasi tertentu.

Sebagai contoh, mahasiswa ditugaskan untuk menulis instruksi berikut untuk memeriksa bahwa suatu subset adalah subgrup dan subgrup tersebut normal. Selanjutnya mereka menulis suatu instruksi untuk mengkonstruksi grup faktor (Quotient Group) yang dibentuk dari modulo subgrup normal. Instruksi ISETL yang ditulis sebagai berikut :

```

> Subgrp := func(G, op1,H, op2);
> Return group (G, op1) and group (H, op2)
>> And (H subset G) and
>> Forall x1,y1 in G, x2, y2 in H |
>> (x1 .op y1) = (x2 .op2 y2);
> end;

> normal := func (G, op1, H, op2);
> oo := PR(G, op1);
return subgrp (G, op1, H, op2) and
forall g in G | g .oo H = H .oo g;
end;

quotient := func(G, op1, H, op2);
oo := PR(G, op1);
if normal (G, op1, H, op2) then
return [{g .oo H : g in G}], oo];
end;
end;

```

Kode berikut ini akan mengkonstruksi kuosen dari subgrup normal khusus dari  $S_4$ .

```
S4 := {[a,b,c,d] : a,b,c,d in [1..4] | # {a,b,c,d} = 4};
```

```
Op := func (p,q); return [p(q(i)) : i in [1..4]];
```

```
H := {[1,2,3,4], [2,1,4,3], [3,4,1,2], [4,3,2,1]};
```

```
Subgrp(S4, op, H, op) ;
```

```
[3, 2, 4, 1] . PR(op) H;
```

```
[3, 2, 4, 1] . PR(op) H = H .PR(op) [3, 2, 4, 1];
```

```
normal (S4, op, H, op) ;
```

```
S4modH := quotient (S4, op, H, op) ;
```

```
S4modH ;
```

Menyusun instruksi – instruksi ini memang sulit dan memerlukan waktu yang lama, tetapi ini merupakan suatu kegiatan yang berguna yang menantang untuk mengungkap semua kemampuan mahasiswa.

## Daftar Pustaka

1. Asiala, Mark. et al . (2000). *A framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education..* Reseach in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1– 32,
2. Brown, Anne. et al (1997). *Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups.* Journal of Mathematical Behavior, 16 (3), 187 – 239.
3. Dubinsky, Ed. (1995). *ISETL : A Progmring Language for Leraning Mathematics.* Communications on Pure and Applied Mathematics .Vol. XLVIII, 1027 – 1051.
4. Dubinsky, Ed. & Mc.Donald, M.A. (1991) . *APOS : A Constuctivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research.* Reseach in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education,
5. Dubinsky, Ed. & Leron, Uri. (1994). *Learning Abstact Algebra with ISETL.* New York. Springer – Verlag.
6. Leron, Uri. et al (1994). *On Learning Fundamental Concept of Group Theory,* Educational Study in Mathematics, 27, 267 – 305.