PEMBELAJARAN KONSEP GRUP KUOSIEN (QUOTIENT GROUP) DENGAN MENGGUNAKAN PROGRAM ISETL

Oleh :
Elah Nurlaelah
Jurusan Pendidikan Matematika , FPMIPA – UPI
Jln. Dr. Setia Budhi no. 229 Bandung
&
Ema Carnia
Jurusan Matematika, FMIPA - Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung-Sumedang km.21 Jatinangor

Abstrak

Pembelajaran Struktur Aljabar dengan menggunakan Program ISETL merupakan suatu inovasi metoda pengajaran di Perguruan Tinggi.

Grup Kuosien merupakan salah satu topik dalam mata kuliah Struktur Aljabar (Aljabar Abstraks) yang sering dirasakan sulit oleh sebagian mahasiswa, atau bahkan oleh pengajar dalam menyampaikan materi tersebut. Hal ini disebabkan untuk memahami konsep tersebut diperlukan beberapa konsep prasyarat yang meliputi konsep grup, subgrup, subgrup normal dan koset, disamping itu konsep ini sangat abstraks.

Peranan ISETL untuk membantu penanaman konsep pada mahasiswa dalam pembelajaran Grup Kuosien adalah menjadikan konsep yang abstrak menjadi lebih nyata, sehingga mahasiswa dapat melihat permasalahan tentang konsep tersebut lebih kongkrit.

Yang mendasari tersusunnya program ISETL adalah teori APOS (Action, Process, Object, Schema). Teori tersebut bertujuan untuk mengkonstruksi mental mahasiswa dalam memahami suatu konsep Matematika. Implementasi dari teori APOS adalah pembelajaran dengan siklus ACE (Activities, Class discussion, Exercises).

Kata kunci : *Teori APOS (Action, Process, Object, Schema), Program ISETL, Siklus ACE (Activities, Class discussion, Exercises).*

1. Pendahuluan

Beberapa tahun terakhir ini para peneliti di Amerika yang tergabung dalam suatu komunitas, dikenal dengan RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), telah menerapkan *framework* penelitian dengan paradigma tertentu yang meliputi *Analisis Teoritikal, Desain dan Implementasi Pembelajaran serta Data Empiris*. Kelompok peneliti ini bertujuan untuk meneliti pembelajaran mahasiswa (*student learning*) pada berbagai topik di dalam Kurikulum Matematika di perguruan tinggi.

Menurut [7], ada tiga hal utama dalam perubahan pada pembelajaran matematika di Perguruan tinggi yang harus dilakukan, yaitu :

a. Paradigma Baru dalam Pengajaran.

Dengan pesatnya perkembangan Information Technology (IT) perlu adanya perubahan pemikiran dalam pengajaran karena ternyata pengetahuan matematika bukanlah sejenis komoditas mental yang ditransfer oleh pengajar kepada mahasiswa dengan menggunakan media yang bervariasi seperti ceramah, tulisan, ataupun demonstrasi komputer, melainkan setiap individu harus bisa mengkonstruksi sendiri pengetahuannya. Sementara peran seorang pendidik bukan hanya menerangkan matematika di dalam kelas, melainkan mengarahkan mahasiswa pada pengkonstruksian matematika dalam pemikiran mereka masing masing.

b. Penggunaan komputer

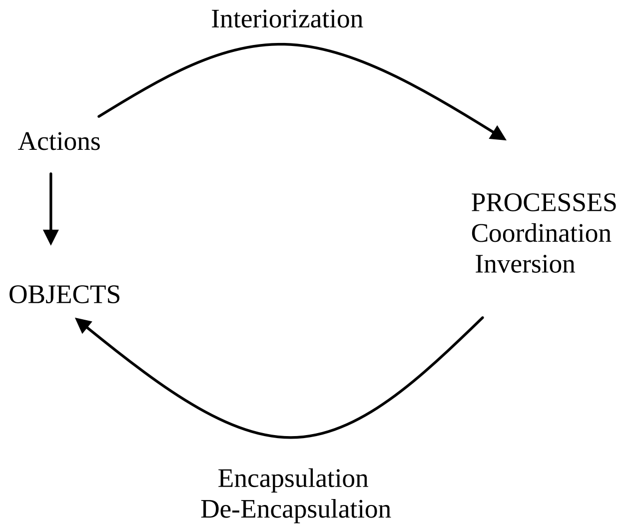
Penggunaan komputer akan mendukung perubahan pengajaran (pada point 1), untuk membantu perkembangan mahasiswa dalam mengkonstruksi mental matematikanya. Hal ini dapat dilakukan dengan berbagai cara, namun cara yang dianggap terbaik adalah implementasi ide matematika pada komputer oleh para mahasiswa, yaitu dengan menuliskan program yang cocok yang mengimplementasikan proses dan objek matematika.

c. Bekerja berkelompok (cooperative learning)

Dalam pembelajaran dengan metode ini mahasiswa bekerja dalam suatu tim untuk mempelajari matematika secara bersama sama, tidak bersaing ataupun secara individu terisolasi.

Dalam kerangka kerja penelitiannya RUMEC mengembangkan dan mengimplementasikan pembelajaran berdasarkan perspektif teori yang dikenal sebagai APOS (*Action, Process, Object, Schema*).

APOS merupakan perluasan dari teori Piaget tentang abstraksi reflektif yang diterapkan pada kurikulum Matematika di Perguruan Tinggi. APOS dapat dipandang sebagai suatu konstruksi mental yang terdiri dari tingkatan *Action, Process, Object, Schema* yang bertujuan untuk memformulasikan konsep Matematika. Kaitan antara tingkatan konstruksi mental *action, pocesses, objects* dapat dihubungkan dalam suatu bagan seperti terlihat dalam Gambar 1 dibawah ini, dan selanjutnya dikelompokkan/ diorganisasikan dalam suatu *schema.*



Gambar 1

Dalam implementasinya, digunakan pendekatan pengajaran dengan siklus ACE yang meliputi tiga komponen yaitu *Activities*, *Class discussion* dan *Exercises*. Pada bagian activity, mahasiswa bekerja di laboratorium komputer untuk membuat program dengan menggunakan serangkaian instruksi ISETL yang mengarah pada konstruktivisme mental. ISETL adalah program komputer yang bersifat interaktif, yang sangat dekat dengan notasi matematika yang standar, sehingga menunjang mahasiswa dalam mengkonstruksi mental mereka.

RUMEC di Amerika telah menerapkannya pada beberapa mata kuliah, salah satunya adalah Aljabar Abstrak. Dari hasil penelitiannya dapat disimpulkan bahwa pembelajaran berdasarkan teori APOS yang diimplementasikan dalam siklus ACE memiliki nilai tambah dibandingkan dengan pengajaran konvensional [1].

Berangkat dari situasi di atas, sedang dilakukan penelitian pada sekelompok mahasiswa untuk mengetahui sampai sejauh mana metoda tersebut dapat diterapkan di Indonesia. Adapun mata kuliah yang diuji cobakan adalah Struktur Aljabar (Aljabar Abstrak), mengingat mata kuliah tersebut merupakan salah satu mata kuliah pokok yang harus diikuti oleh seluruh mahasiswa Program Studi Matematika di seluruh Perguruan Tinggi di Indonesia.

Salah satu topik dalam mata kuliah Struktur Aljabar (Aljabar Abstrak) yang sering dirasakan sulit oleh sebagian mahasiswa (atau bahkan oleh pengajar) dalam menyampaikan materi adalah Grup Kuosien. Hal ini disebabkan untuk memahami konsep tersebut diperlukan beberapa konsep prasyarat yang meliputi konsep grup, subgrup, subgrup normal dan koset., disamping itu konsep grup kuosien sangat abstrak.

2. Metoda Pembelajaran Berdasarkan Siklus *ACE*

Menurut [3] metoda yang menunjang pada pembelajaran berdasarkan teori APOS adalah pengajaran berdasarkan *siklus ACE (Activities, Class discussion, Exercises).* Dalam implementasinya siklus ACE menggunakan komputer sebagai alat untuk mengkonstruksi mental mahasiswa dan belajar secara berkelompok. Mahasiswa dikelompokkan ke dalam grup secara tetap selama mengikuti perkuliahan Aljabar, masing – masing kelompok terdiri dari 4 atau 5 orang. Proses belajar mengajar dilaksanakan sebanyak 2 kali dalam seminggu, terdiri dari satu kali kegiatan di laboratorium komputer dan satu kali di kelas tanpa komputer. Di laboratorium komputer mahasiswa diberi lembar kerja yang berisi instruksi /program ISETL yang harus dikerjakan, dimana program tersebut berkaitan dengan konsep – konsep yang belum diajarkan di kelas. Tujuan mengerjakan lembar kerja ini dimaksudkan untuk memberikan stimuli dan pengalaman yang mengarah pada konstruksi suatu konsep. Hasil yang diperoleh selama melakukan aktivitas di laboratorium akan didiskusikan di kelas pada pertemuan berikutnya.

Diskusi kelas bertujuan untuk memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk mengemukakan temuan – temuan yang mereka peroleh di laboratorium. Berbagai masalah yang muncul dari setiap kelompok selama berada di laboratorium dikemukakan pada pertemuan kelas ini. Keuntungan dari diskusi kelas ini adalah terjadinya pertukaran informasi yang saling melengkapi sehingga mahasiswa mempunyai konsep yang sama. Sementara itu dosen berperan sebagai fasilitator dalam mengarahkan diskusi mahasiswa menuju ke arah konsep yang benar .

Untuk memantapkan konsep yang telah diperoleh, mahasiswa diberi tugas tambahan baik berupa tugas yang harus menggunakan komputer ataupun tugas yang berisi latihan – latihan soal.

3. Bahasa ISETl sebagai Suatu Bahasa Pemograman Matematika

ISETL singkatan dari Interactive SET Language. ISETL adalah suatu terjemahan bahasa pemrograman matematika yang menyajikan konsep himpunan dan konsep fungsi yang digunakan oleh matematikawan. Dengan ISETL memungkinkan para pengguna untuk mendefinisikan himpunan, kemudian mendefinisikan fungsi-fungsi dan operasi biner pada himpunan-himpunan itu. ISETL juga memiliki kemampuan untuk menyatakan kalimat matematika baik secara khusus maupun umum. Kita dapat mendefinisikan himpunan-himpunan dan operasi-operasi, kemudian memeriksa kebenaran tentang himpunan dan operasi yang disajikan dengan menggunakan kalimat matematika.

SETL dikembangkan oleh Jack Schwartz pada tahun 1969. Sementara ISETL untuk Unix, DOS dan Machintos dikembangkan di Clarkson University oleh Gary Levin beberapa tahun kemudian. ISETLW (ISETL for Window dikembangkan oleh John Kirchmeyer di Mount Union College yang dibantu oleh Jamie Wylie dan didukung oleh Tomsich Science Research Grant selama summer 1995. Ucapan terimakasih kepada Ed Dubinsky, yang telah memberikan gagasan untuk menggunakan SETL dalam pengajaran Matematika. Beliau juga yang telah mendorong Gary Levin untuk menciptakan ISETL dan menyemangati John untuk menciptakan ISETLW.

4. Instruksi ISETL untuk Pembelajaran Konsep Grup Kuosien.

Untuk mempelajari konsep Grup Kuosien dengan menggunakan ISETL berdasarkan teori APOS diperlukan beberapa schema yang meliputi schema grup, subgrup, subgrup normal, dan koset. Setiap konsep yang termuat dalam schema tersebut disampaikan melalui media Lembar Kerja Mahasiswa (LKM) yang berisi instruksi –instruksi ISETL tentang konsep-konsep tersebut.

Penyampaian konsep Grup Kuosien tidak lagi menggunakan media LKM melainkan langsung membaca soal –soal yang terkait yang berada pada buku " Learning Abstract Algebra with ISETL". Hal ini disebabkan mahasiswa sudah terbiasa bekerja dengan instruksi ISETL yang diberikan pada LKM sebelumnya, sehingga pada materi Grup Kuosien instruksi ISETL tidak diberikan secara terperinci, tetapi meskipun demikian mereka dapat mengerjakannya

Berikut adalah contoh soal yang bertujuan untuk mengkonstruksi konsep Grup Kuosien yang harus dikerjakan oleh mahasiswa secara berkelompok (soal diambil dari buku referensi hal 120 no. 1, 2 dan 3).

1. In the last section of the previous chapter you constructed, given a group G and a subgroup H, the set of cosets GmodH and coset multiplication in ISETL. The cosets were always right cosets. In the next few activities you'll be exploring the relationship between right and left cosets. Edit the proc name-group to include the set of the right cosets, left cosets and multiplication between cosets. Also, replace K by two funcs, Kr and Kl corresponding to right and left cosets. (You will need your original name_group later so it might be a good idea to save a copy of it under a different name before editing). Now after running name_group you should have the following notation.

   G - the group
   o - the group operation
   oo - the generalized product
   e - the identity of G
   i - the func that for each element g in G returns its inverse
   H - the subgroup
   Kr - the func giving, for each g in G, the right coset H .oo g
   Kl - the func giving, for each g in G, the left coset g .oo H
   GrmodH – the set of all rigt cosets H .oo g for g in G

GlmodH – the set 0f all left cosets g .oo H for g in G

2. Following is a list of group/ subgroup pairs G, H followed by a list of questions. Run your **Proc** from the previous activity on each of the pairs and answer the question for each pair G,H.
   a. Z_{12}, H = {0, 4, 8}
   b. S_3, H = {(1), (1 2)}
   c. S_4, H = {I, (1 2), (3 4), (1 2)(3 4)}
   d. S_4, H = {I, (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)}

   Here are the questions.

   i. For which a $\in$ G is it the case that a .oo H = H .oo a ?
   ii. For which a $\in$ G is it the case that Kl(a) = Kr(a) ?
   iii. Is [GrmodH, oo] a group ?
   iv. Is [GlmodH , oo] a group ?
   v. Is GrmodH = GlmodH ?
3. In Activity 2, for all cases in which GlmodH or GrmodH was not a group, which of the group postulat was not satisfied ?

Contoh hasil kerja/ jawaban mahasiswa dapat dilihat pada lampiran

4. Refleksi Mahasiswa Terhadap Pembelajaran Struktur Aljabar Menggunakan Program ISETL

Setelah beberapa kali melakukan aktivitas laboratorium, kami melakukan evaluasi melalui angket sebagai refleksi yang diharapkan dari mahasiswa. Dengan angket tersebut, diharapkan peneliti mengetahui pendapat mahasiswa tentang apa yang mereka peroleh dan rasakan selama mengikuti perkuliahan dengan menggunakan program ISETL, sebagai suatu metoda baru bagi mereka, dan juga ingin mengetahui apakah kegiatan di laboratorium cukup membantu mereka atau tidak. Dari hasil angket diperoleh hasil rangkuman sebagai berikut :

1. Pendapat mahasiswa dalam mengikuti perkuliahan struktur Aljabar I berkaitan dengan ketertarikan mereka terhadap adanya aktivitas di kelas dan di laboratorium komputer.

   Sekitar 90 % mahasiswa setuju dengan sistem perkuliahan ini, dengan alasan :

   a. Mahasiswa sudah memperoleh gambaran dari hasil pekerjaan di laboratorium, sehingga pada saat pertemuan kelas, mereka sudah mempunyai bekal ilmu, minimal dari pengalamannya selama di laboratorium.
   b. Aktifitas laboratorium membuat pemahaman mahasiswa terhadap materi lebih mantap dan menumbuhkan kreatifitas.
   c. Dapat lebih melihat masalah abstrak sebagai sesuatu yang real.

d. Di laboratorium lebih bebas berkreasi dan bereksperimen.
e. Menyenangkan dan bersemangat karena mahasiswa berperan aktif dalam pembelajaran.
f. Matematika sudah mengikuti perkembangan jaman, tidak gagap teknologi, tidak sekedar menghitung seperti anggapan kebanyakan orang.
g. Adanya kesinambungan dari satu materi praktikum ke materi selanjutnya.
h. Muncul kebiasaan baru, yaitu berdiskusi karena selalu bekerja dalam kelompok.
i. Program ISETL bersifat interaktif, sehingga lebih menantang, terutama jika mendapatkan soal yang sulit terpecahkan, namun pada akhirnya terjawab.

10 % tidak setuju atau kurang setuju, dengan alasan :

a. Menjadikan mahasiswa ada yang malas, karena tidak semua mahasiswa menggunakan komputer.
b. Tidak tahu banyak dalam program komputer, sehingga proses di laboratorium menjadi lambat.
c. Tidak ada asisten yang membantu pada saat praktikum.

2. Komentar dan saran mahasiswa secara umum :
   a. Kegiatan laboratorium cukup melelahkan, karena selama berada di Laboratorium, tidak berhenti berfikir, karena selalu berinteraksi dengan komputer, tetapi hasil kerja di laboratorium dapat diingat relatif lebih lama.
   b. Praktikum dilaksanakan setelah teori.
   c. Materi praktikum agar dipermudah.
   d. Setiap orang menggunakan satu komputer.
   e. Dosen memberikan gambaran umum tentang pengerjaan LKM.

5. Kesimpulan .

Dari hasil pengamatan di atas diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Pembelajaran Grup Kuosien dengan menggunakan program ISETL berdasarkan teori APOS dirasakan lebih mudah diterima oleh mahasiswa, karena mereka terlibat langsung dalam mengkonstruksi konsep tersebut yang mengakibatkan terbentuknya konstruksi mental untuk tingkatan APOS.
2. Berdasarkan komentar dari mahasiswa ternyata aktifitas laboratorium membuat pemahaman mahasiswa terhadap materi lebih mantap dan menumbuhkan kreatifitas. Disamping itu terbentuk suatu kebiasaan baru dimana mahasiswa selalu bekerja dalam kelompok sehingga mareka dapat saling membantu. Meskipun demikian terdapat pula mahasiswa yang

beranggapan bahwa aktivitas di laboratorium menyebabkan meraka menjadi malas karena tidak setiap mahasiswa mendapat satu komputer (2 komputer untuk 1 kelompok yang terdiri dari 4 atau 5 orang).

3. Aktivitas di kelas untuk pembelajaran konsep Grup Kuosein berjalan relatif lebih mudah karena mahasiswa sudah mempunyai bayangan tentang materi tersebut yang mereka peroleh dari aktivitas laboratorium.
4. Pembelajaran Struktur Aljabar I dengan program ISETL merupakan suatu inovasi metoda pembelajaran di Perguruan Tinggi. Program tersebut merupakan implementasi pengajaran dengan siklus ACE berdasarkan Teori APOS.

Daftar Pustaka

[1]. Asiala, Mark. et al . (2000). ***A framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education.***. Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1– 32.

[2]. Brown, Anne. et al. (1997). ***Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups.*** Journal of Mathematical Behavior, 16 (3), 187 – 239.

[3]. Dubinsky, Ed. (1995). ***ISETL : A Programming Language for Learning Mathematics***. Communications on Pure and Applied Mathematics .Vol. XLVIII, 1027 – 1051.

[4]. Dubinsky, Ed. & Mc.Donald, M.A. (1991) . ***APOS : A Constuctivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research.*** Reseach in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education

[5]. Dubinsky, Ed. & Leron, Uri. (1994). ***Learning Absrtact Algebra with ISETL.*** New York. Springer – Verlag.

[6]. Leron, Uri. et al (1994). ***On Learning Fundamental Concept of Group Theory,*** Educational Study in Mathematics, 27, 267 – 305.

[7]. Weller, Kirk, et al (2000). ***An Examination of Student Permoncane Data is Recent RUMEC Studies. http :// trident.mcs. kent. edu/~edd/.***

Lampiran

Berikut contoh hasil pekerjaan mahasiswa.

1. *Semua rangkaian instruksi ISETL berikut digunakan untuk mengkonstruksi konsep grup kuosien.*

```
>    is_closed := func(G,o);
>>   return forall x, y in G | ( x .o y ) in G;
>>   end;
```

```
>   is_assoc := func(G, o);
>>  return forall x, y, z in G | ( x .o y) .o z = x .o(y .o z);
>>  end;
>   has_identity := func(G,o);
>>  return
>>  exists e in G |(forall x in G| e .o x = x );
>>  end;
>   identity := func(G, o);
>>  return
>>  choose e in G |(forall x in G | e .o x = x and x .o e = x);
>>  end;
>   has_inverses := func(G,o);
>>  local e;
>>  e := identity(G, o);
>>  return
>>  is_defined(e) and ( forall x in G | (exists x' in G | x' .o x = e));
>>  end;
>   inverses := func(G, o, x);
>>  local e;
>>  e := identity(G,o);
>>  return choose x' in G | x' .o x = e;
>>  end;

>   name_group := proc(set, operation);
>>  G := set; o := operation;
>>  e := identity(G,o);
>>  i := |g -> inverses(G, o, g)|;
>>  writeln "group objects defined: G, o, e, i";
>>  end;

>   Z15 := {0..14};
>   a15 := func(x,y);
>>  if ( x in Z15 and y in Z15 ) then
>>  return ( x + y ) mod 15;
>>  end;
```

```
>>   end;
>    13 .a15 12;
>    13 .a15 12;
10;
```

> *$ Akan diperiksa apakah rangkaian instruksi ISETL di atas berfungsi atau tidak pada himpunan Z15 dengan operasi penjumlahan modulo 15 sebagai berikut :*

```
>    name_group(Z15, a15);
group objects defined: G, o, e, i
>    is_closed(G, o);
true;
>    is_assoc (G, o);
true;
>    has_identity(G, o);
true;
>    has_inverses (G, o);
true;

>    PR := func(G,o);
>>   return func (x,y);
>>   if ( x in G and y in G ) then
>>    return ( x .o y );
>>    elseif ( x in G and y subset G ) then
>>    return {( x .o b) : b in y};
>>    elseif ( x subset G and y in G ) then
>>    return {( a .o y ) : a in x };
>>    elseif ( x subset G and y subset G ) then
>>    return {( a .o b ) : a in x, b in y };
>>    end;
>>    end;
>>    end;
>
>     13 .oo 5;
3;
```

```
>       13 .o 5;
3;

>       !pp name_group
name_group := proc(set, operation);
G := set; o := operation;
e := identity(G,o);
i := |g -> inverses(G, o, g)|;
writeln "group objects defined: G, o, e, i";
end;
>       name_group := proc( set, operation opt subst);
>>      G := set; o := operation; oo := PR(G,o);
>>      e := identity(G, o); i := | g -> inverses(G,o,g)|;
>>      writeln " Subgroup objects defined : G, o, oo, e, i. ";
>>      if is_defined (subst) then
>>      H := subst;
>>      GrmodH := { H .oo g : g in G }; $ The sets of right cosets;
>>      Kr := | g -> H .oo g |; $ Kr(g) is the coset of g;
>>      GlmodH := { g .oo H: g in G}; $ The sets of left cosets;
>>      Kl := | g -> g .oo H |; $ Kl(g) is the left coset of g;
>>      writeln " Subgroup objects defined : H, GrmodH, Kr, GlmodH, Kl. ";
>>      end;
>>   end;

>    H := {0, 3, 6, 9, 12 };
>    H .oo 1;
{10, 7, 13, 1, 4};
>    H .oo 2;
{2, 5, 11, 14, 8};
>    GrmodH :=  { H .oo g : g in G };
>    is_closed(GrmodH, oo);
true;
>    GrmodH;
{{1, 4, 13, 10, 7}, {5, 2, 14, 11, 8}, {6, 0, 3, 12, 9}};
```

2\. a.

```
>     Z12 := {0..11};
>     a12 := func(x,y);
>>    if ( x in Z12 and y in Z12 ) then
>>    return ( x + y ) mod 12;
>>    end;
>>    end;
>     name_group(Z12, a12);
 Subgroup objects defined : G, o, oo, e, i.
>     H := {0, 4, 8};
>     1 .oo H;  H .oo 1;
{5, 9, 1};
{1, 5, 9};
```

i.

```
>     2 .oo H; H .oo 2;
{10, 2, 6};
{10, 2, 6};
>     !setrandom off
>     3 .oo H; H .oo 3;
{3, 7, 11};
{3, 7, 11};
>     4 .oo H; H .oo 4;
{0, 4, 8};
{0, 4, 8};
>     5 .oo H; H .oo 5;
{1, 5, 9};
{1, 5, 9};
>     $ untuk setiap x dalam G maka x .oo H = H .oo x
```

ii.

```
>     Kr :=  | g -> H .oo g |;
>     Kl := | g -> g .oo H |;
>     Kr(1); Kl(1);
{1, 5, 9};
{1, 5, 9};
>     Kr(2); Kl(2);
{2, 6, 10};
{2, 6, 10};
```

```
>    Kr(3); Kl(3);
{3, 7, 11};
{3, 7, 11};
>    Kr(4);Kl(4);
{0, 4, 8};
{0, 4, 8};
>    Kr(5); Kl(5);
{1, 5, 9};
{1, 5, 9};
>    $ Untuk setiap x dalam G maka Kr(x) = Kl(x)
```

iii.

```
>    GrmodH :=  { H .oo g : g in G };
>    GrmodH;
{{0, 4, 8}, {1, 5, 9}, {2, 6, 10}, {3, 7, 11}};
>    is_closed(GrmodH, oo);
true;
>    is_assoc(GrmodH, oo);
true;
>    has_identity(GrmodH, oo);
true;
>    identity(GrmodH, oo);
{0, 4, 8};
>    has_inverses(GrmodH, oo);
true;
>    inverses(GrmodH, oo, {0, 4, 8}); inverses(GrmodH, oo,{1, 5, 9}); inverses(GrmodH,
     oo, {2, 6, 10}); inverses(GrmodH, oo, {3, 7, 11});
{0, 4, 8};
{3, 7, 11};
{2, 6, 10};
{1, 5, 9};
>      $ GrmodH merupakan suatu grup.
```

iv.

```
>    GlmodH := { g .oo H: g in G};
>    GlmodH;
{{0, 4, 8}, {1, 5, 9}, {2, 6, 10}, {3, 7, 11}};
```

```
>    is_closed(GlmodH, oo); is_assoc(GlmodH, oo); has_identity(GlmodH, oo);
     identity(GlmodH, oo); has_inverses(GlmodH, oo);
true;
true;
true;
{0, 4, 8};
true;
>    inverses(GlmodH, oo, {0, 4, 8}); inverses(GlmodH, oo,{1, 5, 9}); inverses(GlmodH,
     oo, {2, 6, 10}); inverses(GlmodH, oo, {3, 7, 11});
{0, 4, 8};
{3, 7, 11};
{2, 6, 10};
{1, 5, 9};
>    $ GlmodH merupakan suatu grup.
>    $ GrmodH sama dengan GlmodH seperti terlihat pada hasil berikut;
```

v.

```
>    GrmodH; GlmodH;
{{0, 4, 8}, {1, 5, 9}, {2, 6, 10}, {3, 7, 11}};
{{0, 4, 8}, {1, 5, 9}, {2, 6, 10}, {3, 7, 11}};
>    GrmodH = GlmodH
```

b.

```
>    S3 := {[a,b,c] : a,b,c in [1..3] | # {a,b,c} = 3};
>    op := func(x, y);
>>   if ( x in S3 and y in S3 ) then
>>   return [ x(y(i)): i in [1..3]];
>>   end;
>>   end;
>    name_group(S3, op);
 Subgroup objects defined : G, o, oo, e, i.
>    G;
{[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]};
```

i.

```
>    H := {[1,2,3], [2,1,3]};
>    H .oo [1,3,2]; [1,3,2] .oo H;
{[1, 3, 2], [2, 3, 1]};
{[1, 3, 2], [3, 1, 2]};
```

```
>     H .oo [3,1,2]; [3,1,2] .oo H;
{[3, 1, 2], [3, 2, 1]};
{[1, 3, 2], [3, 1, 2]};
>     $ Untuk setiap x dalam G diperoleh  H .oo x tidak sama dengan x .oo H
```

ii.
```
>     Kr([1,3,2]); Kl([1,3,2]);
{[1, 3, 2], [2, 3, 1]};
{[1, 3, 2], [3, 1, 2]};
>     Kr([3,1,2]); Kl([3,1,2]);
{[3, 1, 2], [3, 2, 1]};
{[1, 3, 2], [3, 1, 2]};
>     $ Ternyata Kl(x) tidak sama dengan Kr(x)
```

iii.
```
>     GrmodH := { H .oo g : g in G };
>     GrmodH;
{{[1, 2, 3], [2, 1, 3]}, {[1, 3, 2], [2, 3, 1]}, {[3, 1, 2], [3, 2, 1]}};
>     is_closed(GrmodH, oo);  is_assoc(GrmodH, oo); has_identity(GrmodH, oo);
      identity(GrmodH, oo); has_inverses(GrmodH, oo);
false;
true;
true;
OM;
false;
>     is_closed(H, o); is_assoc(H, o); has_identity(H,o); identity(H, o); has_inverses(H,o);
true;
true;
true;
 [1, 2, 3];
true;
>     GrmodH;
{{[1, 2, 3], [2, 1, 3]}, {[1, 3, 2], [2, 3, 1]}, {[3, 1, 2], [3, 2, 1]}};
>     is_closed(GrmodH, oo); is_assoc(GrmodH, oo); has_identity(GrmodH, oo);
      identity(GrmodH, oo); has_inverses(GrmodH, oo);
false;
true;
```

```
true;
OM;
false;
```

iv.
```
>   GlmodH := { g .oo H: g in G};
>   GlmodH;
{{[1, 2, 3], [2, 1, 3]}, {[1, 3, 2], [3, 1, 2]}, {[2, 3, 1], [3, 2, 1]}};
>   is_closed(GrmodH, oo);
false;
>   is_assoc(GrmodH, oo);
true;
>   has_identity(GrmodH, oo);
true;
>   identity(GrmodH, oo);
OM;
>   has_inverses(GrmodH, oo);
false;
```