

KAJIAN HASIL-HASIL PENELITIAN YANG BERKAITAN DENGAN TEORI APOS DAN KREATIVITAS MATEMATIKA

**Disusun Oleh:
Elah Nurlaelah
Jurusan Pendidikan Matematika
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA**

A. Pendahuluan

Makalah ini akan menyajikan ringkasan dari beberapa hasil penelitian yang dilakukan oleh peneliti-peneliti dari dalam dan luar negeri. Hasil penelitian ini dikaji untuk dijadikan sumber dan rujukan bagi penelitian yang akan dilakukan oleh penulis. Adapun hasil penelitian yang dikaji pada makalah ini adalah penelitian-penelitian yang berkaitan dengan Teori APOS dan Kreativitas Matematika.

B. Penelitian-Penelitian yang Berkaitan dengan Teori APOS

Kelompok RUMEC telah melakukan beberapa penelitian yang memeriksa beberapa aspek dari penampilan mahasiswa pada mata kuliah Kalkulus, yaitu pertama "*The Development of Students, Graphical Understanding of the Derivative*" yang dilakukan oleh Asiala, *et al.* (1997b) pada penelitian ini para peneliti mengeksplorasi pemahaman mahasiswa terhadap grafik suatu fungsi dan turunannya. Kedua "*The Schema Triad- A Calculus Example* ", penelitian ini dilakukan oleh Baker, *et al.* (1997) pada penelitian ini peneliti mempelajari kebiasaan siswa untuk mengkonstruksi grafik suatu fungsi apabila hanya diberikan kondisi-kondisi yang meliputi kekontinuan, turunannya, dan asimtotnya. Ketiga "*Constructing Schema: The Case of The Chain Rule* ", penelitian ini dilakukan oleh Clark, *et al.* (1997), pada penelitian ini peneliti memeriksa sifat dan

pengembangan konsep mahasiswa untuk materi Aturan Rantai. Dan keempat ” *Understanding Sequence : A Tale of Two Objects* “, penelitian ini dilakukan oleh McDonald, *et al* (1991), pada penelitian ini peneliti memeriksa konstruksi mental mahasiswa yang mungkin terbentuk yang berkaitan dengan konsep Barisan.

Setiap penelitian itu membandingkan penampilan pemahaman matematika mahasiswa selama perkuliahan, paling tidak selama satu semester pada aspek-aspek kalkulus, konsep-konsepnya, komputer dan pembelajaran berkelompok (Calculus, Concepts,, Computers, and Cooperative Learning disingkat C⁴L). Penelitian-penelitian ini membandingkan tingkat pemahaman mahasiswa yang diperoleh antara mahasiswa yang pembelajarannya menggunakan Teori APOS dengan mahasiswa yang pembelajarannya berdasarkan cara tradisional atau metode konvensional. Meskipun demikian kedua kelompok ini menggunakan kurikulum yang sama, sehingga perbedaannya hanya dalam metode pembelajarannya saja.

Secara umum hasil yang diperoleh pada penelitian itu adalah :

- Perbandingan data pada kalkulus menunjukkan hasil yang konsisten pada kelompok eksperimen. Khususnya untuk setiap kategori, mahasiswa yang berasal dari kelompok eksperimen mencapai hasil yang lebih tinggi daripada mahasiswa pada kelompok tradisional.
- Hasil yang diperoleh mahasiswa yang pembelajarannya menggunakan teori APOS lebih tinggi daripada hasil yang diperoleh mahasiswa yang pembelajarannya dengan cara tradisional. Berkaitan dengan konsep fungsi 8 dari 11 pertanyaan yang disajikan dapat dijawab dengan tepat oleh 70% mahasiswa. Secara rata-rata 66% menjawab secara benar.

- Berkaitan dengan perkembangan kognitif : Respon mahasiswa untuk materi sifat-sifat fungsi dan kelakuan fungsi pada subintervals sebagai domainnya, 29% mahasiswa pada kelompok eksperimen dan 13% pada kelompok tradisional mencapai level perkembangan shcema trans (interval) dan trans (sifat-sifat). Selanjutnya mahasiswa pada kelompok eksperimen menunjukkan penguasaan konsep yang lebih matang daripada mahasiswa pada kelompok tradisional 67% mahasiswa dari kelompok eksperimen dan 33% mahasiswa dari kelompok tradisional menunjukkan penguasaan konsep SEQFUNC, dan 40% mahassiswa kelompok eksperimen dan 17% mahasiswa dari kelompok tradisional dapat diklasifikan mencapai perkembangan schema tingkat trans.

Selanjutnya akan disajikan beberapa hasil penelitian yang berdasarkan Teori APOS yang diterapkan pada mata kuliah Struktur Aljabar (Aljabar Abstrak). Pengolahan data pada penelitian-penelitian ini menggunakan metode kualitatif. Data yang diperoleh dari hasil tes, yang dilengkapi dengan wawancara (indepth interview) untuk mendapat gambaran sejauh mana atau pada tingkat berfikir yang mana suatu konsep dikuasai oleh siswa (mahasiswa).

Penelitian yang akan dilakukan adalah 1) “*The Development of students’ Understanding of Permutations and Symmetrics*” , Asiala, et al. (1998) yang meneliti bagaimana mahasiswa mengembangkan pemahamannya untuk materi permutasi pada himpunan hingga dan sifat simetri dari poligon beraturan, 2) “*Student Understanding of Cosets, Normality, and Quotient Groups*”, Asiala, et al. (1997a) yang mempelajari konstruksi mental yang terbentuk dalam mengembangkan pemahamannya pada konsep Koset, Normalitas, dan Grup Kosien/Grup Faktor, dan 3) “*Learning Binary Operation, Groups, and*

Subgroups”, Brown, *et al.* (1997) yang memeriksa pemahaman siswa dalam memformulasikan konsep-konsep Operasi Biner, Grup, dan Subgrup.

Dari penelitian-penelitian di atas diperoleh hasil yang secara umum dapat disajikan sebagai berikut;

- Data perbandingan pada mata kuliah Struktur Aljabar menunjukkan hasil yang konsisten pada kelompok eksperimen. Khususnya untuk setiap kategori, mahasiswa yang berasal dari kelompok eksperimen mencapai hasil yang lebih tinggi daripada mahasiswa pada kelompok tradisional.
- Berkaitan dengan data non-perbandingan, mahasiswa yang pembelajarannya menggunakan Teori APOS dan Siklus ACE, data yang dihasilkan saling melengkapi dengan data yang dihasilkan pada analisis perbandingan. Berdasarkan pengalaman pada waktu mengajar, dipercaya bahwa hasil yang diperoleh lebih tinggi daripada hasil yang diperoleh mahasiswa yang pembelajarannya dengan cara tradisional. Karena 72% mahasiswa secara rata-rata, setiap individu menjawab tes individual dan wawancara secara tepat. Pada ujian kelompok semua menjawab secara sempurna 5 pertanyaan dari 7 pertanyaan yang ada. Untuk beberapa materi sisa, kelompok yang kehilangan beberapa nilai menjawab hampir dekat kepada jawaban yang benar, selanjutnya secara keseluruhan rata-rata nilai kelompok adalah 89%.
- Berkaitan dengan perkembangan kognitif.
Paling tidak 42% mahasiswa pada kelompok eksperimen mencapai tingkat kognitif *Object* untuk satu atau beberapa konsep.

Ditambahkan bahwa pembelajaran dengan teori APOS dapat menganalisa tingkat pemahaman mahasiswa pada suatu konsep, maka teori ini dapat dijadikan

alat untuk menjelaskan dan untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa terhadap matematika.

Penelitian lain yang menggunakan Teori APOS dilakukan oleh Dubinsky (1989) yang mengkaji "*On Teaching Mathematical Induction II*". Penelitian ini bertujuan untuk memeriksa kemampuan mahasiswa dalam mengkonstruksi dan mendiskusikan pembuktian matematika dengan metode induksi. Penelitiannya dilaksanakan pada mahasiswa tingkat dua yang telah mendapat mata kuliah matematika diskrit yang pembelajarannya berdasarkan teori APOS. Data non-komparatif diperoleh dari 40 mahasiswa yang mengikuti mata kuliah tersebut. Keempat puluh mahasiswa tersebut berasal dari dua universitas. Kebanyakan dari mahasiswa tersebut sedang mengikuti mata kuliah wajib komputer dan teknik.

Data yang dianalisa pada penelitian ini berasal dari dua instrumen. Pertama dari *take-home tes* yang terdiri 10 soal tentang pembuktian dengan metode induksi dan *ujian individu*. Kesepuluh soal tersebut dirinci dengan kategori berikut;

- Empat soal berbentuk rumus persamaan dan pertidaksamaan yang melibatkan bilangan bulat positif. Mahasiswa diminta untuk membuktikan dengan menggunakan induksi matematika.
- Dua soal menuntut mahasiswa untuk membuktikan bahwa suatu bentuk dapat dibagi dengan yang lainnya untuk setiap bilangan bulat positif n .
- Satu soal berbentuk suatu barisan dan mahasiswa diminta untuk menyusun rumus umum, selanjutnya dengan menggunakan induksi matematika mahasiswa diminta untuk membuktikan validitas rumus tersebut untuk semua bilangan bulat positif n .
- Satu soal adalah soal yang berkaitan dengan penyusunan prosedur ISETL. Pada soal ini mahasiswa diminta untuk menunjukkan, bahwa untuk dua

variabel yang terdiri dari bilangan bulat sebagai input, maka suatu kesamaan aljabar yang diberikan dapat memenuhi prosedur looping.

- Dua soal berupa soal yang tidak standar dan siswa diminta untuk membuktikannya dengan induksi matematika.

Mahasiswa diberi waktu sebulan untuk menyelesaikan soal-soal yang diberikan. Mereka diminta untuk bekerja sendiri tanpa berinteraksi dengan mahasiswa yang lain dan tanpa menggunakan buku sumber yang lain selain buku catatan dan buku yang digunakan sehari-hari.

Sementara pada *ujian individu*, mahasiswa diberi sekumpulan soal dengan pertanyaan-pertanyaan adalah sebagai berikut;

Q#1 Jelaskan masing-masing soal berikut dan berikan masing-masing suatu contoh.

- a. Metode pembuktian
- b. Proposisi – nilai fungsi dari bilangan bulat positif
- c. Implikasi – nilai fungsi dari bilangan bulat positif.

Q#2 Jelaskan dengan kata-kata sendiri. Apa yang dimaksud pembuktian dengan induksi? Apa yang diperlukan dalam pembuktian dengan induksi ?.

Q#3 Modus Ponens (Metode sebagai jembatan) mengacu pada aktivitas mental, jika anda mengetahui implikasi $A \Rightarrow B$ dan anda mengetahui A dipenuhi, selanjutnya anda mengetahui bahwa B diketahui, berperan sebagai apa konsep ini dalam induksi matematika ?

Q#4 Misalkan anda telah menerapkan metode induksi matematika pada suatu pernyataan, yang dimulai pada $n=1$, dan berhasil melengkapi pembuktian. Setelah mengerjakan langkah ini, apa yang akan anda katakan pada orang lain yang tidak tahu banyak matematika untuk menyakinkan dia bahwa

pernyataan anda benar untuk sembarang bilangan bulat tertentu sebut $n = 10$? atau $n = 1000$? Berikan cara yang kongkrit untuk meyakinkan orang lain tentang cara pembuktian yang tadi anda berikan (berupa langkah coba-coba).

Untuk topik induksi matematika, 53% dari pembuktian matematika dengan induksi dijawab oleh mahasiswa secara lengkap dan benar, dengan rata-rata 71% untuk setiap pembuktian induksi. Pada ujian individu, mahasiswa memenuhi 5 kriteria dari 6 kriteria dengan rata-rata nilai penampilan 70% atau lebih. Dengan demikian metode pembelajaran yang didasarkan pada teori ini merupakan suatu alat yang valid untuk digunakan dalam pembelajaran konsep-konsep matematika tingkat tinggi.

Sedangkan hasil penelitian yang dilakukan oleh Nurlaelah dan Usdiyana (2003) yang dilakukan terhadap 45 orang mahasiswa pada mata kuliah Struktur Aljabar I di Universitas Pendidikan Indonesia diperoleh hasil sebagai berikut;

- Model pembelajaran ini dapat terus dikembangkan di UPI, karena model pembelajaran ini dapat memberikan bantuan dalam mempersiapkan mahasiswa untuk mengikuti suatu perkuliahan. Akibatnya mahasiswa menjadi lebih aktif baik secara fisik maupun mental dalam mengikuti suatu perkuliahan.
- Berdasarkan hasil analisa terhadap butir soal, jika mereka dihadapkan pada soal-soal yang berkaitan dengan penjelasan suatu teorema atau definisi maka hampir seluruh mahasiswa dapat menjawab dengan benar dan jelas, akan tetapi ketika mereka dihadapkan pada persoalan aplikasi dari suatu definisi atau teorema, atau membuktikan suatu teorema, beberapa

mahasiswa masih belum mampu menerapkan definisi atau teorema tersebut.

- Pada prinsipnya setiap individu dapat membentuk konstruksi mental APOS (Action, Process, Object dan Schema) untuk masing-masing konsep. Sekitar 50% mahasiswa pengikut mata kuliah Struktur Aljabar I telah mencapai konstruksi mental Action, Process, Object dan Schema. Namun seberapa dalam konstruksi mental itu terbentuk dalam pikiran masing-masing masih perlu penelitian lebih lanjut.

Pembelajaran berdasarkan teori APOS dapat meningkatkan ketertarikan dan semangat mahasiswa pada mata kuliah Struktur Aljabar I, yang merupakan hal yang potensial dimana hal ini akan memberikan keuntungan yang baik dalam segi akademik. Disamping itu mahasiswa cenderung memberikan perhatian yang khusus pada pembelajarannya

C. Penelitian-Penelitian yang Berkaitan dengan Kreativitas

Berikut disajikan hasil penelitian Sriraman yang disajikan dalam jurnal *The Mathematics Educator* pada tahun 2004. Subyek pada penelitian ini adalah lima matematikawan dari Fakultas Pascasarjana Matematika untuk program doktor (Ph.D) yang berada di Universitas-Universitas di negara Eropa. Para matematikawan ini dipilih berdasarkan kecakapan (kepandaian) dalam berbagai bidang matematika yang telah mereka dikerjakan yang diukur berdasarkan banyaknya makalah yang telah diterbitkan dalam jurnal-jurnal terkemuka, dan berbagai kajian matematika yang telah mereka lakukan dalam penelitian-penelitiannya. Empat orang matematikawan yang terpilih berkedudukan sebagai profesor penuh, mereka telah mengabdikan diri sebagai matematikawan selama

kurang lebih 30 tahun. Satu dari matematikawan tersebut masih muda tetapi sudah berkedudukan sebagai associate profesor. Seluruh wawancara dilaksanakan secara formal, dengan setting ruangan tertutup, di ruangan kantor mereka masing-masing, dan wawancara yang dilaksanakan direkam oleh tape-recorder.

Karena kreativitas adalah suatu konstruksi yang luar biasa rumit yang meliputi ruang lingkup yang luas antara interaksi sikap dan kemampuan. Sehingga peneliti berkeyakinan bahwa penelitian ini harus dilakukan secara holistik, sedangkan prinsip induksi analisis digunakan dalam transkrip wawancara untuk menemukan tema dominan yang menjelaskan kelakuan selama penelitian. Menurut Patton (dalam Sriraman, 2004) "Induksi Analisis, bertolak belakang dengan teori dasar, yaitu dimulai dengan menganalisa proposisi deduksi atau teori yang mendasari hipotesis yang merupakan suatu prosedur untuk membuktikan teori dan proposisi yang didasarkan pada data kualitatif". Sedangkan Taylor dan Bogdan(dalam Sriraman, 2004), menyatakan bahwa Prinsip Induksi Analisis dapat menganalisa data dengan hati-hati untuk mendapat hal-hal yang umum. Hal lain dalam penelitian ini adalah membuktikan apakah model Gestalt yang berada pada literatur dapat dipakai pada data kualitatif yang diperoleh untuk mengekstrakan proses kreatif para matematikawan. Jika terdapat suatu tema atau kejadian yang muncul tidak dapat diklasifikasi atau dinamai karena peneliti tidak dapat memegang sifat-sifatnya atau signifikansinya, maka perbandingan secara teoritik dilakukan. Corbin dan Strauss (dalam Sriraman, 2004) menyatakan bahwa "Menggunakan perbandingan akan memunculkan sifat-sifat, yang akhirnya dapat digunakan untuk memeriksa kejadian atau objek-objek dalam data. Kejadian yang khusus, objek-objek, atau tindakan-tindakan yang digunakan ketika perbandingan teoritis digunakan dapat diturunkan dari literatur atau berdasarkan pengalaman. Ini

tidak berarti bahwa literatur atau pengalaman digunakan sebagai data, tapi semata-mata kita menggunakan sifat-sifat dan dimensi dimunculkan dari perbandingan kejadian untuk memeriksa data yang ada dihadapan kita. Tema yang muncul adalah interaksi sosial, persiapan, penggunaan heuristik, perbandingan, inkubasi, iluminasi, verifikasi, intuisi, dan pembuktian. Berikut disajikan kutipan-kutipan wawancara untuk menjelaskan karakteristik yang direkonstruksi dan sebagai diskusi terhadap wawancara yang dilakukan secara panjang lebar.

Komentar 1. (berkaitan dengan interaksi sosial)

Respon para matematikawan terhadap supervisi penelitian, pada umumnya setiap matematikawan mengakui bahwa interaksi sosial secara umum merupakan suatu aspek yang penting dalam mendorong kerja kreatif. Kebanyakan dari para matematikawan menyatakan keuntungan dapat melakukan kontak e-mail dengan rekan sejawat dan mengikuti konferensi matematika dan pertemuan professional lainnya. Ini menuntut eksplorasi lebih lanjut yang membutuhkan persiapan yang terfokus.

Persiapan dan Penggunaan Heuristik

Ketika para matematikawan sedang mempelajari topik baru, selalu ada seorang peneliti lain yang sedang mempelajari topik yang sama untuk topik yang baru itu. Satu tujuan dari penelitian ini adalah untuk menemukan bagaimana proses kreatif matematikawan menyelesaikan suatu topik atau persoalan. Apakah mereka mencoba pendekatan mereka, atau pertama mereka mencoba untuk mengasimilasi apa yang mereka telah ketahui tentang topik itu? Apakah mereka menggunakan komputer untuk memperoleh keuntungan terhadap persoalan? Apakah mereka menggunakan berbagai metode untuk menyelesaikan topik baru

atau persoalan? Respon dari para matematikawan menunjukkan bahwa beberapa pendekatan mereka gunakan. Berikut adalah ringkasan yang diperoleh;

Komentar 2:

Respon-respon yang diperoleh menunjukkan bahwa para matematikawan menghabiskan waktu yang banyak untuk meneliti konteks (inti) dari suatu persoalan. Hal yang paling utama dilakukan adalah membaca literatur dan bertukar pendapat dengan matematikawan yang lain yang berada pada bidang ilmu yang sama. Penemuan ini konsisten dengan sistem model, yang menyatakan bahwa kreativitas merupakan suatu proses dinamik yang meliputi interaksi antara individu, domain, dan lapangan Csikzentmihalyi (dalam Sriraman, 2004 :). Pada tahap ini, sangat beralasan untuk menanyakan apakah cara kerja para matematikawan terfokus pada suatu persoalan sampai mereka dapat menemukan jawabannya atau mereka dapat bekerja dalam memecahkan berbagai persoalan yang muncul secara bersamaan. Dari hasil penelitian ini ditemukan bahwa setiap matematikawan bekerja pada beberapa persoalan secara bersamaan, menggunakan pendekatan *kedepan - kebelakang*.

Komentar 3

Komentar berikut menunjukkan bahwa matematikawan cenderung untuk bekerja beberapa persoalan dalam satu waktu. Apakah matematikawan menukar urutan kerja ke depan - ke belakang secara random, atau mereka bekerja terfokus pada suatu persoalan sebelum mereka mengganti dengan persoalan yang lain? Beberapa matematikawan melaporkan menggunakan alasan secara heuristik, mencoba untuk membuktikan sesuatu pada suatu hari dan membuktikan kembali pada hari yang lain, mencari contoh dan contoh penyanggah, menggunakan “ manipulasi” untuk memperoleh suatu penjelasan

dari suatu persoalan. Hal ini menunjukkan bahwa matematikawan bekerja secara heuristik yang secara eksplisit dibuat oleh Polya.

Tapi tidak jelas kapan matematikawan menggunakan komputer untuk memperoleh suatu pengalaman atau perhitungan dalam menyelesaikan suatu persoalan. Peneliti juga sangat tertarik untuk mengetahui tipe-tipe khayalan yang digunakan oleh matematikawan dalam kerjanya. Para matematikawan dalam penelitian ini meragukan tentang hal ini, dan komentar berikut memberikan gambaran pada kita aspek-aspek dari kreativitas matematika.

Khayalan

Para matematikawan dalam penelitian ini ditanya tentang macam-macam khayalan yang mereka gunakan pada waktu memikirkan objek--objek matematika. Dilaporkan secara sekilas tentang cara-cara matematikawan memikirkan objek-objek matematika. Respon mereka menunjukkan kesulitan dalam menjelaskan secara eksplisit tentang khayalan.

Komentar 4

Kebanyakan dari matematikawan cenderung untuk menggambar banyak gambar (coretan) ketika mereka memecahkan suatu persoalan, ada yang cenderung memanipulasi sesuatu di udara (khayalan), untuk menggambar bagaimana sesuatu bekerja, menggambar secara geometri yang didasarkan intuisi. dan untuk menggambarkan konsep yang sangat terdefinisi maka dilakukan banyak manipulasi.

Berkaitan dengan kesulitan dalam menjelaskan khayalan mental, para matematikawan melaporkan bahwa mereka tidak menggunakan komputer pada waktu mereka bekerja. Karakteristik dari kerja para matematikawan untuk ilmu matematika murni adalah sebagaimana dikemukakan oleh Poincare (1948)

menggunakan “pilihan” metapora dan Eryvynck (dalam Tall, 1991) menggunakan bentuk “ pembuatan keputusan non algoritmik”. Keraguan digambarkan oleh matematikawan tentang tidak tepatnya penggunaan mesin untuk mengerjakan semua pekerjaan mereka untuk dibawa ke dalam pikiran mereka sebagaimana yang disampaikan oleh Garret Birkhoff.

Inkubasi dan Iluminasi

Dilaporkan pada bagian supervisi penelitian bahwa interaksi sosial, penggunaan heuristik dan khayalan, keduanya dapat dipandang sebagai aspek-aspek langkah persiapan dari kreativitas matematika. Setelah kedua langkah itu timbul pertanyaan apa yang muncul kemudian?. Pada literatur telah disarankan bahwa setelah matematikawan bekerja keras untuk memperoleh suatu gambaran tentang suatu persoalan, terdapat suatu perioda transisi (berhenti dari bekerja secara sadar pada suatu persoalan dan mulai bekerja secara tidak sadar), selama waktu itu persoalan disimpan secara tak sadar dalam pikiran kemudian akan muncul lagi ke permukaan. Para matematikawan dalam penelitian ini dilaporkan bahwa pengalaman yang mereka kemukakan sejalan dengan literatur yang ada dalam Hadamard, 1945 dan Poincare 1948.

Komentar 5

Dari hasil penelitian ini tiga dari lima matematikawan dilaporkan sesuai dengan model Gestalt.

Intuisi, Verifikasi dan Pembuktian

Bagian ini akan menguraikan bagaimana intuisi para matematikawan dalam membuktikan intuisi mereka dan aturan formal dalam proses kreatifnya. Para matematikawan itu ditanya apakah mereka sering mengulang bukti yang telah disusun, apakah mereka menggunakan pembuktian yang terpisah, dan

apakah mereka mencari aplikasinya?. Para matematikawan dalam penelitian ini menyatakan bahwa yang terpenting dalam membuktikan adalah pembuktian secara formal. Hal ini sejalan dengan literatur tentang pembuktian formal dalam matematika (Polya, 1954, Usiskin, 1987). Kebanyakan para matematikawan menyatakan sangat perlu untuk menghubungkan dengan hasil yang lain dalam daerah yang sama.

Komentar 6

Komentar ini menunjukkan bahwa para matematikawan membuktikan bahwa pembuktian memiliki derajat kekakuan yang bervariasi. “ Diantara para matematikawan, kekakuan pembuktian tergantung pada waktu dan suasana, dan banyak pembuktian dalam jurnal-jurnal memenuhi kriteria yang digunakan oleh guru-guru geometri tingkat SMP (setiap pembuktian diikuti oleh alasan). Secara umum kekakuan meningkat hanya jika hasilnya tidak terlihat benar. (Usiskin, 1987). Pembuktian merupakan langkah akhir dari suatu proses. Hasil dari kerja kreatif matematikawan adalah menunjukkan alasan untuk suatu bukti, sehingga bukti yang ditemukan memiliki alasan yang dapat diterima, mungkin dengan menebak. Bagaimana matematikawan membuktikan sesuatu dalam penelitian ini sangat berbeda dengan apa yang ditemukan dalam kebanyakan buku. Pendekatan logika adalah rekonstruksi yang penting dalam penemuan untuk diarahkan pada sistem deduktif, dan pada proses intuisi terlibat untuk mendapatkan proses penemuan.

Dari hasil analisa, peneliti menemukan bahwa model Gestalt yang diajukan oleh Hadamard masih sesuai untuk diterapkan. Penelitian ini juga berhasil menambahkan *dimensi khayalan, intuisi, interaksi sosial, penggunaan heuristik, dan pentingnya pembuktian pada proses kreatif* pada model Gestalt yang terdiri

dari *preparation – incubation- illumination-verification*. Disamping itu ditemukan juga bahwa semua matematikawan pada penelitian ini bekerja pada lebih dari satu persoalan pada suatu waktu.

Oleinik (1998) melakukan penelitian kreativitas terhadap kurang lebih 70 orang mahasiswa keguruan di *Kharkov State Pedagogical University*. Penelitian ini bertujuan secara psikologi dan pedagogik dapat mengembangkan kapasitas kreatif mahasiswa keguruan. Mata kuliah yang dijadikan objek pada penelitian ini adalah mata kuliah Ilmu Matematik – Komputer. Ide umum yang mengilhami terlaksananya kuliah ini adalah supaya terlaksana pelatihan bagi mahasiswa keguruan yang kemungkinan memiliki keterbatasan pemahaman dalam menggunakan teknologi (seperti program DERIVE dan Geometri-Cabri), disamping itu mata kuliah ini bertujuan untuk mendorong munculnya kontrol pedagogik dari aktivitas kognitif mahasiswa. Hal ini dianggap penting untuk mengembangkan kemampuan mahasiswa keguruan dalam penelitian yang berkaitan dengan mengapa dan bagaimana mereka harus menggunakan teknologi, khususnya teknologi seperti microworlds dan Computer Algebra Systems (CAS).

Dari investigasi pedagogik jangka panjang (selama dua tahun) ditemukan bahwa cara pembelajaran lama memunculkan kelambanan dan ketidak efisien, padahal guru dimasa yang akan datang harus mempersiapkan pengetahuannya sendiri tentang pedagogik penelitian. Pada penelitian sebelumnya Oleinik, *et al.* (1996) menunjukkan bahwa mahasiswa tidak cukup hanya memiliki pengetahuan yang bagus, keterampilan dan kebiasaan. Tetapi sangat perlu mahasiswa dapat mengembangkan pengetahuan psikologinya yang mendasar tentang keanehan seseorang pada aktivitas tertentu yang berkontribusi pada pencapaian yang berhasil. Pengetahuan tersebut akan terwujud secara sendirinya melalui sistem

kualitas intelektual seseorang, yaitu: kemampuan membangun ide baru dan mengemukakan permasalahan secara independen, berpikir fleksibel dan original (kemampuan untuk menerima permasalahan yang dikenal dalam konteks baru), kemampuan untuk mentransformasi pengetahuan dan keterampilan dalam situasi yang baru, dan lain sebagainya.

Pendekatan yang digunakan pada penelitian ini didasarkan pada teori berpikir dan belajar matematika dari Schwank (dalam Oleinik, 1998) tentang struktur mental pilihan seseorang, yang disebut prediksi melawan struktur fungsi kognitif. Proses pengajaran harus merefleksikan hasil-hasilnya. Pendekatan ini terdiri dari beberapa komponen, komponen pertama pendekatan siswa didasarkan pada teori berfikir visual dan pengembangannya (Arnchame dan Luria dalam Oleinik, 1998). Langkah yang terpenting dari berfikir secara visual adalah langkah untuk membentuk kerangka hipotesis tentang kemungkinan cara-cara pemecahan masalah dengan analisa dan peramalan dari kemungkinan hasil-hasilnya. Komponen kedua adalah suatu teori untuk mengembangkan kreativitas matematika (Krutetzki dalam Oleinik, 1986) dan paradigma pendekatan *open-ended* dalam pengajaran matematika (Nohda dan Pehkonen dalam Oleinik, 1998) untuk mengembangkan kompetensi umum dari aktivitas ilmu pengetahuan (abstraksi, generalisasi, spesialisasi, dan lain sebagainya).

Hipotesis yang disusun dalam penelitian ini adalah Mata kuliah khusus yang diberikan untuk membentuk kreativitas mahasiswa keguruan, berkontribusi untuk mencapai keberhasilan yang penuh pada pedagogik mahasiswa yang berkaitan dengan aktivitas kognitif. Disamping itu, peneliti berpendapat, bahwa penggunaan microworld Dynamic Mazes memungkinkan untuk menunjukkan cara kognitif yang berbeda tentang cara berfikir atau untuk berfungsi. Peneliti

berpendapat bahwa penelitian ini akan meningkatkan keefektifan penelitian pada mahasiswa keguruan.

Proses pembelajaran dibagi menjadi tiga tingkatan (walaupun semuanya berkaitan);

- Pengembangan kreativitas sebagai penelitian berfikir;
- Kemahiran dalam metode aktivitas kognitif;
- Kemahiran dalam pengetahuan dan keterampilan matematika murni.

Berkaitan dengan hal yang disampaikan di atas, peneliti membedakan tiga daerah tingkatan dari penelitian mahasiswa pada tiap-tiap permasalahan pedagogik yang mendekati setiap tipe dari aktivitas yang diselesaikan, yaitu; 1) kreativitas pada algoritma non-standar, yaitu secara independen membuat suatu permasalahan, menggeneralisasi fakta-fakta, fenomena, aturan, dan strategis, 2) aktivitas didasarkan pada algoritma yang sudah diketahui tapi dengan isi yang baru, 3) aktivitas yang merupakan reproduksi (mereproduksi bentuk baru). Solusi yang berhasil dari permasalahan-permasalahan ini dikaitkan dengan pengembangan masing-masing keterampilan intelektual.

Dari hasil penelitian ini menunjukkan bahwa mahasiswa dari kelompok eksperimen bergerak menuju level pertama lebih cepat dan lebih mudah dibanding dengan yang lainnya. Disamping itu tugas-tugas mahasiswa berupa makalah yang disusun mempunyai karakteristik yang asli dan independen, meskipun tema yang dipilih cukup kompleks. Sebagai contoh; bentuk keterampilan dan kebiasaan siswa-siswa dalam menyelesaikan permasalahan persamaan trigonometri atau menyelesaikan permasalahan-pernyataan nyata, eksplorasi komputer dalam mempelajari permukaan orde kedua atau kurva bidang. Disamping itu mayoritas dari kelompok eksperimen menguasai level kedua. Dari kelompok kedua, tidak

terdapat hasil yang seperti ini (walaupun kedua kelompok ini berbeda agak jauh dalam nilai tertentu).

Secara keseluruhan hasil penelitian dapat disajikan sebagai berikut; Realisasi pengalaman dari mata kuliah khusus ini menunjukkan, bahwa penggunaan Derive dan Geometri Cabri mendukung dalam pembelajaran masalah-masalah algoritmik dan semi-algoritmik sebagaimana permasalahan heuristik dan itulah sebabnya metode heuristik dari operasi adalah intrinsik aktivitas kreativitas (abstraksi, generalisasi, spesialisasi, dan lain sebagainya).

Evaluasi terhadap data eksperimen memungkinkan peneliti merumuskan hasil-hasil berikut;

1. Pengetahuan siswa yang baik tidak menjamin keberhasilan mereka dalam aktivitas kreativitas.
2. Teknologi seperti microworld dan computer algebra system berkontribusi untuk menumbuhkan ketertarikan mahasiswa keguruan dalam penelitian psikologi dalam aktivitas kognitif.
3. Mempelajari metode mengajar modern (tingkat dan metode untuk membimbing eksplorasi, metode heuristik, dan lain sebagainya), akan mengakibatkan mahasiswa membangun permasalahan yang baru oleh mereka sendiri dan menginvestigasi ide metode yang baru dengan menggunakan komputer.

Mempelajari inti dari teori perbedaan individual dari struktur mental yang disebabkan oleh computer microworld dalam menaikkan keefektifan penelitian mahasiswa menunjukkan ketertarikan mahasiswa yang besar untuk mengembangkan rekomendasi praktis dari teori ini.

Selanjutnya pada bagian ini akan disajikan hasil-hasil penelitian guru-guru yang sedang berpraktek dalam membentuk kreativitas siswa (terutama untuk siswa berbakat). Penelitian ini dilakukan Kraus' (dalam Pardala, 2003) dan Makiewicz' (dalam Pardala, 2003).

Kraus adalah salah seorang pengajar matematika di suatu sekolah menengah, dia mengembangkan ketrampilan solusi kreatif dari masalah-masalah matematika. Dalam melakukan tinjauan ulangnya terhadap literatur pada bidang ini beliau menekankan pencapaian kreativitas dengan pedagogi yang disampaikan oleh G. Poly, A. Góralski dan T. Wronski. Penulis memperkenalkan istilah “ purposefully selected set of problems” pada penelitiannya. Setelah melaksanakan suatu eksperimen yang bersifat pendidikan selanjutnya beliau membandingkan hasil yang dicapai oleh kelompok percobaan dan kelompok eksperimen, dan menarik kesimpulan. Berikut adalah sebagian hasil yang diperoleh:

- 1) Faktor yang membedakan antara murid yang " kuat" dan yang " lemah" dalam matematika adalah kemampuan memilih dan memecahkan permasalahan yang tidak rutin yang melebihi silabus, dan juga kesesuaian untuk menerapkan metoda bervariasi untuk memecahkan permasalahan;
- 2) Ide “ purposefully selected set of problems “ atau gagasan untuk memilih secara penuh rangkaian permasalahan dan contoh-contoh tentang keberhasilan mendorong penulis untuk menulis suatu garis besar metodologi yang diharapkan dapat meningkatkan kemampuan guru matematika;
- 3) penggunaan pembelajaran jarak jauh yang terstruktur, khususnya dengan memilih persoalan dan bentuk pembelajaran lain yang ditujukan untuk anak-anak berbakat;

- 4) Masih terdapat satu pertanyaan terbuka: Bagaimana bekerja dengan anak muda yang berbakat dalam matematika dengan menggunakan teori pencapaian dan praktek pedagogi kreativitas.

Makiewicz mendiskusikan kreativitas matematika siswa-siswa sekolah menengah yang menggunakan komputer. Penulis dalam disertasinya menyajikan penelitian antar disiplin ilmu dengan berdasar pada literatur yang relevan dan mencoba untuk menyajikan teori mendasar tentang kreativitas matematika siswa. Setelah menguraikan evolusi yang berkaitan dengan kreativitas selanjutnya beliau menyajikan hasil yang menyerupai suatu dugaan yang berkaitan secara integral, yaitu: berfikir, berfikir kreatif, dan bakat kreatif. Sebagai hasilnya ia mendapatkan suatu sintesa tentang pengetahuan kreativitas yang menjadi inti disertasinya. *Kreativitas* yang dipahami disini mempunyai pengertian yang luas, sebagai suatu kemampuan yang penting bagi pengembangan kognitif, sistem aesthetic atau system sensorial. Disisi lain *kreativitas matematika* dipahami sebagai substansi tertentu yang merupakan keluaran ilmu pengetahuan ilmiah yang dibangun, pembaharuan dan pelengkapan sistem pengetahuan melalui aktivitas yang sesuai dari kreativitas alami. Lebih lanjut, Makiewicz menekankan suatu fakta bahwa kreativitas matematika melibatkan pengembangan aktivitas dan kemampuan kreatif alami matematika.

Pada penelitiannya, Makiewicz membagi kreativitas matematika siswa menjadi dua tingkatan yaitu : *kreativitas tak terdefinisi* (yang berisi kognisi elementer, emosi dan proses motivasi) dan *kreativitas terdefinisi* (mencoba sesuatu untuk mencapai suatu hasil, memecahkan suatu masalah dengan pemahaman strukturnya, arti dan konteks). Selama penelitian sampai terlaksananya kreativitas dengan menggunakan komputer dia menerapkan dua metodologi

pendekatan (humanistic-scientific) dan melaksanakan investigasi baik secara kualitatif dan kuantitatif. Peneliti melengkapi hasil yang diperoleh dengan metode kuantitatif dengan metoda kualitatif, yang berupa : 1) hasil tes psikologis (yang menguji berfikir kreatif), 2) hasil –hasil tes atas berfikir kreatif matematika dari para murid yang menggunakan komputer.

Makiewicz juga mempelajari banyak hal, di antaranya: 1) tingkatan perilaku kreatif umum dari para murid sekolah menengah, 2) kualitas komputer, akses apa yang diselidiki kelompok para murid dan bagaimana pendapat guru tentang aplikasi komputer dalam pengajaran matematika, 3) tingkat aktivitas matematika para murid yang menggunakan komputer.

Dalam kesimpulan, Makiewicz mengemukakan bahwa hasil penelitiannya mengkonfirmasi kejadian tentang perilaku kreatif dari para murid yang diselidiki, yang didukung oleh penggunaan komputer. Penyusunan dan penerapan rangkaian masalah masih dapat digunakan pada penyelidikan dan popularisasi pengetahuan untuk didiagnosis lebih lanjut tentang perilaku matematika para murid sekolah menengah. Lebih lanjut, Makiewicz dengan mengacu pada pengetahuan yang dikumpulkan berkaitan dengan perilaku matematika para murid sekolah menengah mengatakan, bahwa penelitian ini hanyalah permulaan yang meneliti perilaku dan hasil yang diperoleh menyarankan suatu kebutuhan untuk memodifikasi pendidikan bagi para guru matematika seperti halnya metode mengajar dan belajar matematika.

Dengan memperhatikan pertimbangan di atas dan analisa berdasarkan sejarah, evolusi pendidikan dan pengembangan kemampuan murid dan strategi mendidik para murid berbakat, dapat dibedakan menjadi empat jenis aktivitas didaktik dan organisatoris yang direkomendasikan, yaitu:

- 1) pengembangan para murid berbakat lebih cepat, ini berarti meningkatkan cara mereka belajar,
- 2) menyediakan sejumlah pengetahuan yang lebih luas, yaitu, mengembangkan ruang lingkup materi pelajaran,
- 3) menawarkan pengetahuan yang lebih maju artinya pengetahuan diberikan berbeda dan lebih maju daripada pengetahuan mereka pada tingkatnya dan harapan pribadinya,
- 4) pembentukan daya kreativitas murid dikaitkan dengan proses pengajaran untuk topik tertentu.

Semua usulan di atas dapat diterima, proses mendidik para murid berbakat memerlukan pengorganisasian yang terencana dengan baik pada bidang pendidikan dengan tugas-tugas kependidikan dalam pembentukan kreativitas anak-anak berbakat (juga kreativitas matematikanya) merupakan suatu target. Sistem yang diberikan untuk anak berbakat dapat juga diadopsi untuk anak yang mempunyai talenta sebagai berikut;

- 1) pengajaran bertingkat dan cara mengajar materi yang bervariasi
- 2) staf yang berkualitas mengawasi perkembangan mereka.

Konsep pembentukan kreativitas matematika dalam pengajaran matematika secara integral dihubungkan dengan gagasan untuk mengembangkan aktivitas kreatif matematika dari para murid yang harus direalisasikan melalui aktivitas intelektual, aspek-aspek didaktik, evaluasi, dan guru sebagai orang yang bertanggung jawab untuk perencanaan dan pembimbingan (Klakla dalam Pardala, 2004). Konsep-konsep Klakla (ditujukan untuk siswa sekolah menengah) lainnya terdiri dari dua langkah yaitu pengajaran seperti halnya pengembangan elemen-elemen aktivitas kreatif matematika dari para murid tertentu dan yang sewajarnya

untuk memilih program mengajar dan metodologi yang unik untuk mencapai suatu aktivitas kreatif matematika tertentu. Hal ini juga merupakan hasil pemilihan dari permasalahan-permasalahan dan contoh-contoh tertentu, permasalahan yang bertingkat dan contoh-contoh pragmatis.

Efektivitas pembentukan kreativitas para murid dalam pengajaran matematika yang bekerja dengan murid berbakat juga dikondisikan melalui suatu kooperasi yang bermanfaat dengan sekolah, guru matematika dan tenaga ahli lainnya (penasihat metodologi, para ahli matematik dan para pendidik matematika, ahli-ahli pendidikan dan psikolog kreativitas). Di tingkatan sekolah, suatu program yang diorganisir dengan baik dan disiapkan untuk bekerja dengan murid yang berbakat sangat dibutuhkan. Program seperti itu meliputi konsep-konsep pengembangan dan pendidikan yang diterima bagi para murid berbakat dengan menggunakan pengalaman yang sudah berjalan lama. sebagaimana penyelesaian masalah dari masyarakat untuk sekolah kreatif dan perkumpulan sekolah-sekolah aktif yang mendasarkan proses pendidikannya pada berdasarkan perbedaan individu. Pada penyusunan program harus memperhatikan hal-hal berikut sebagai berikut;

- 1) menunjuk dan melihat anak-anak yang berbakat
- 2) menunda pembelajaran kelas biasa untuk mendorong dan bekerja para murid yang luar biasa berbakat secara matematika,
- 3) menyusun program kerja tertentu bagi para murid yang berbakat dalam matematika

Format pekerjaan khusus dalam pembentukan efektivitas kreativitas matematika meliputi:

- 1) Aktivitas tambahan, yaitu melakukan pembelajaran di luar jam pelajaran dengan melakukan penyesuaian dengan - minat dan kebutuhan individu para murid berbakat dalam matematika,
- 2) Masyarakat matematika yang anggotanya datang dari tingkatan yang berbeda memotivasi untuk meluaskan pengetahuan dan pertukaran gagasan matematika,
- 3) Pengajaran terprogram secara individu untuk murid yang berbakat dengan harapan dapat sukses di kompetisi atau olimpiade matematika,
- 4) Pertemuan-Pertemuan antara peserta olimpiade terdahulu dari sekolah atau daerah tertentu dengan teman sekolah yang lebih muda yang tertarik untuk ambil bagian dalam olimpiade matematika atau kontak individu antara yang sudah mengikuti olimpiade dengan para peneliti, dan para ahli matematik,
- 5) Partisipasi para murid berbakat dalam aktivitas (pertemuan-pertemuan dan workshop, kuliah dan seminar) yang diorganisir oleh departemen matematika (Institut, Fakultas) untuk deduksi yang lebih tinggi sebagai bentuk kepedulian para ahli matematik dari perguruan tinggi,
- 6) Partisipasi dalam aktivitas di bidang pendidikan yang diorganisir oleh Lembaga Nasional untuk Anak-Anak yang menghubungkan antara Anak muda yang paling berbakat dengan perwakilan pemerintah dari Bidang matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

D. Penutup

Kajian terhadap hasil-hasil penelitian di atas menunjukkan bahwa pembelajaran dengan menggunakan teori APOS masih menyimpan sejumlah

persoalan yang menarik untuk digali. Terutama pada penggunaan metode kualitatif yang biasanay digunakan dalam menganalisis hasil penelitian yang diperoleh pada penelitian-penelitian tersebut. Dengan demikian akan sangat bermanfaat dalam pengembangan teori pendidikan dan teori belajar mengajar jika penelitian – penelitian itu dikaji secara kuantitatif dan kualitatif. Disamping itu bagaimana peranan pembelajaran teori APOS dalam meningkatkan kemampuan kreativitas, daya matematika, problem solving dan lain-lain belum begitu banyak diungkap, terutama di Indonesia yang memiliki karakteristik, kultur, kurikulum, dan sistem pendidikan yang mungkin berbeda dengan negara-negara yang sudah melaksanakan penelitian ini.

E. Daftar Pustaka

- Asiala, M. *et al.* (1997a). " Student Understanding of Cosets, Normality, and Quotient Groups", *Journal of Mathematic Behavior*. 16(3), 241-309.
- Asiala, M. *et al.* (1997b). "The Development of Students, Graphical Understanding of the Derivative" . *Journal of Mathematic Behavior*. 16(4), 399-431.
- Asiala, M. *et al.* (1998). "The Development of students' Understanding of Permutations and Symmetrics" . *International Journal of Mathematical Learning*, 3, 13-43
- Baker, *et al.* (1997). " The Schema Triad- A Calculus Example ". *Journal of Mathematics Behavior*, 16 (5). 180- 235.
- Brown, A. *et al.* (1997). "Leraning Binary Operation, Group, and Subgroup". *Journal of Mathematics Behavior*, 16 (3). 187- 239.
- Clark, *et al.* (1997). "Constructing Schema: The Case of The Chain Rule ". *Journal of Mathematics Behavior*, 16 (4). 345 - 364.
- Dubinsky., E. (1989). "On Teaching Mathematical Induction II". *Journal of Mathematical Behavior*. 8, 285- 304.
- McDonald, *et al.* (1991). "Understanding Sequence : A Tale of Two Objects ". *Journal of Mathematics Behavior*, 16 (5).. 255- 272.
- Nurlaelah, E dan Usdiyana, D (2003). "Inovasi Pembelajaran Struktur Aljabar I dengan Menggunakan Program ISETL Berdasarkan Teori APOS". *Hibah Pembelajaran DUE-LIKE*, UPI; Tidak Diterbitkan
- Sriraman, B (2004). *The Characteristics of mathematical Creativity*. Jurnal The Mathematics Educator . Vol 14 No. 1. 19 – 34 .
- Oleinik, T & Krikun, V. (1996). *School Geometry Explorations with Using TRADECAL Package*. Rusia: Kharkov.
- Oleinik, T. (1998). *Teacher Students' Researches on Cognitive Activity with Technologies*. Online.[Tersedia]. <http://www.find.uni-osnabrueck.ed/ebooks/erne/cerme1-proceedings.html> . [25 maret 2005].
- Pardala, A. (2004). *Creativity Formation in Mathematic Education*. Polandia. Rzeszow. University of Tachnology.

