PENGETAHUAN DASAR TEORI GRAF

Oleh: Nurjanah

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA UPI BANDUNG

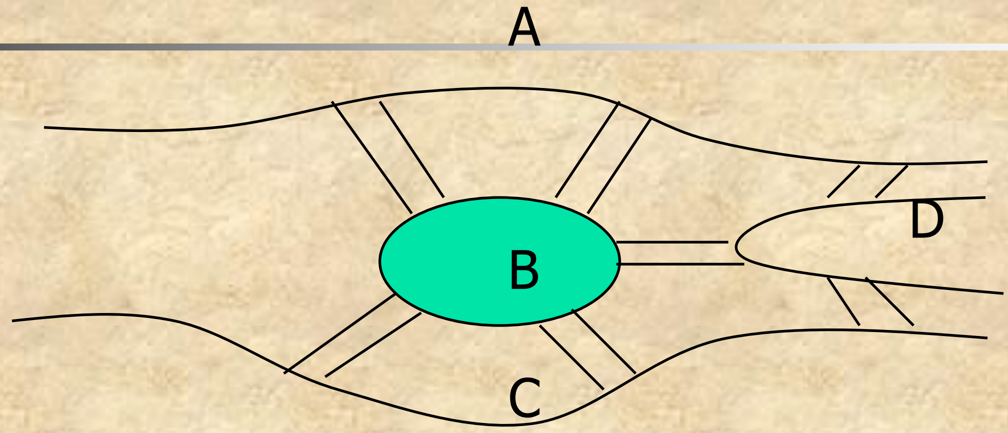
PENGETAHUAN DASAR TEORI GRAF

1 Sejarah Singkat dan Beberapa Pengertian Dasar Teori Graf

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui makalah tulisan Leonard Euler seorang ahli matematika dari Swiss. Euler adalah orang pertama yang berhasil memecahkan masalah jembatan Konigsberg (kota Konigsberg, sebelah timur Prussia, Jerman sekarang) di sungai Pregal yang sangat terkenal di Eropa

- Tahun 1847, G.R. Kirchoff (1824 – 1887) berhasil mengembangkan teori pohon (*Theory of trees*) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Cayley (1821 – 1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan permasalahan kimia yaitu hidrokarbon.

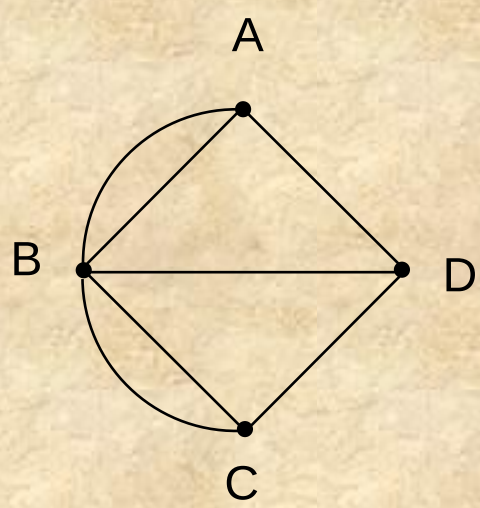
- Teori graf itu diawali oleh masalah transportasi yang terkenal yaitu Jembatan Konigsberg. Ilustrasi jembatan tersebut dapat dilihat pada Gambar di bawah ini.



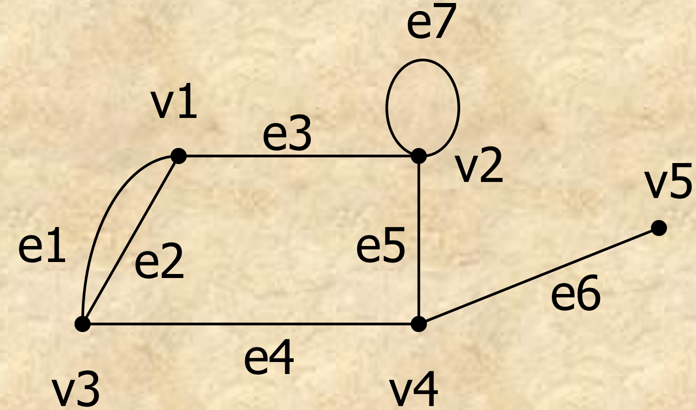
Gambar Ilustrasi jembatan Konigsberg

Pada gambar tersebut, A, B, C, dan D adalah daerah-daerah yang dihubungkan oleh tujuh buah jembatan. Masalahnya, para penduduk Konigsberg tidak mampu menemukan rute yang melalui setiap jembatan tepat satu kali, bergerak dari suatu tempat tertentu dan kembali ke tempat itu lagi.

- Graf Model Jembatan Konigsberg



e_7 loop/gelang



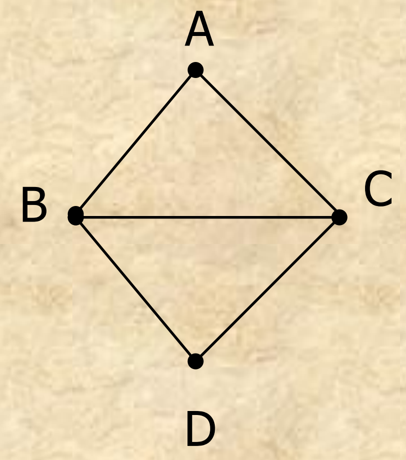
2 Istilah-istilah yang Berkaitan dengan Graf

- Sisi yang dua titik ujungnya sama disebut ***loop*/gelang**.

Dalam sebuah graf dimungkinkan adanya lebih dari satu sisi yang dikaitkan dengan sepasang titik. Pasangan sisi semacam ini disebut **sisi-sisi paralel/sejajar** atau **sisi rangkap** (*multiple edges* atau *paralel edges*).

Sebuah graf yang tidak memiliki loop dan tidak memiliki sisi paralel disebut **graf sederhana** (*simple graph*).
Jika sebuah titik v_i merupakan titik ujung dari suatu sisi e_j, maka v_i dan e_j disebut saling berinsidensi atau titik v_i **menempel/insiden** (*incidency*) dengan sisi e_j.
Dua sisi yang tidak paralel disebut **bertetangga/ajasen** (*adjacent*), bila kedua sisi tersebut menempel dengan titik yang sama.

Graf Sederhana



d(A) = 2	d(B) = 3
d(C) = 3	d(D) = 2

- **Derajat (*degree)* Titik**

  Jumlah atau banyaknya sisi yang menempel dengan suatu titik v_i (loop dihitung dua kali), disebut **derajat (*degree*)** dari titik tersebut; dinotasikan $d(v_i)$. Derajat suatu titik sering juga disebut **valensi** dari titik tersebut. Derajat minimum dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan derajat maksimumnya dinotasikan dengan $\Delta(G)$.

- **Lemma Jabat Tangan (*Handshaking Lemma*)**

    Untuk setiap graf G dengan n titik dan m sisi berlaku:

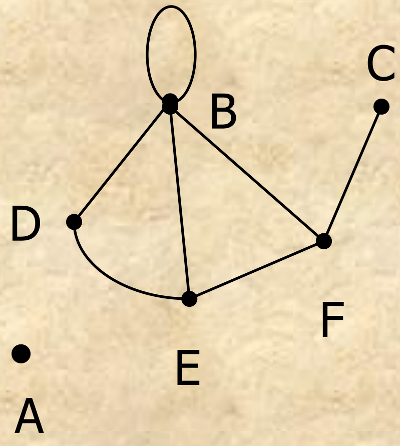
$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

- ***Teorema***

    Banyaknya titik berderajat ganjil dalam sebuah graf selalu genap.

- Sebuah titik yang tidak memiliki sisi menempel terhadap titik tersebut disebut **titik terisolasi/titik terpencil** (*isolated vertex*).
- Sebuah titik berderajat satu disebut **titik anting/ujung,** yang selanjutnya disebut **daun**.
- Graf yang tidak memiliki sisi, disebut **graf nol** atau **graf kosong (*null graph*)**. Dengan kata lain, tiap titik dalam sebuah graf nol merupakan titik-titik terisolasi. Graf nol dengan *n* titik, dinotasikan $\boldsymbol{N_n}$.

- Titik terpencil A
- Titik ujung/daun C



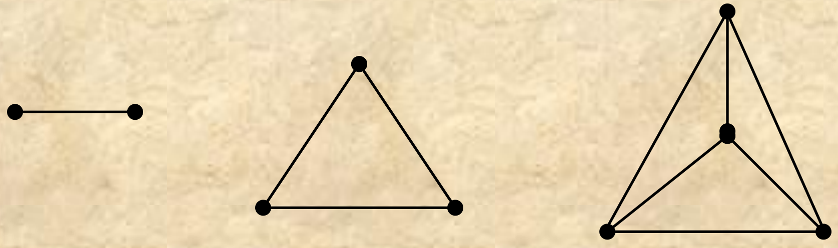
- Sebuah **jalan *(walk)*** di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \ldots e_k\ v_k$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi
- Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut **titik awal** dan **titik akhir** W. Sedangkan titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ disebut titik-titik **internal** dari W; dan k disebut **panjang** dari W.

- Jika semua sisi e_1, e_2, e_3, …, e_k dalam jalan W berbeda, maka W disebut sebuah **jejak *(trail)*.**
- Jika semua titik v_0, v_1, v_2, …, v_k dalam jalan W juga berbeda, maka W disebut sebuah **lintasan *(path)*.** Sebuah jalan W disebut **tertutup**, jika titik awal dan titik akhir dari W identik (sama).
- Jejak tertutup disebut **sirkit** (*circuit*). Sirkit yang titik awal dan titik internalnya berlainan disebut **lingkaran/siklus** (*cycle*). Siklus dengan n titik dinotasikan dengan $\boldsymbol{C_n}$**.**

3 Beberapa Graf Khusus

- ## Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Misalkan $G = (V,E)$ adalah sebuah graf sederhana. Jika untuk setiap pasangan titik v_i dan v_j di G terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya, maka G disebut **graf lengkap**. Sebuah graf lengkap sering juga disebut sebagai **graf universal**. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan $\boldsymbol{K_n}$.



- Banyaknya sisi dalam graf lengkap *G* adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

- **Graf Lingkaran (*Cycles Graph*)**

  Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n.

- **Graf Teratur (*Regular Graph*)**

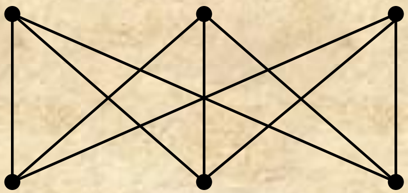
  Sebuah graf disebut **graf teratur** jika semua titiknya berderajat sama. Apabila derajat setiap titik adalah r , maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r.

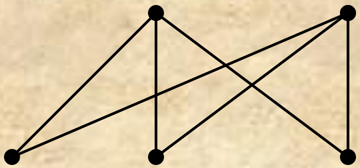
- **Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)**

    Sebuah graf G disebut **graf bipartit** jika $V(G)$ (himpunan titik graf G) dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian X dan Y, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah titik di X ke sebuah titik di Y.

- Apabila G **sederhana** dan **bipartit** dengan partisi (X,Y) sedemikian sehingga setiap titik di X bertetangga dengan setiap titik di Y, maka G disebut **graf bipartit lengkap**, dinotasikan dengan $\boldsymbol{K_{m,n}}$ dengan m dan n adalah banyaknya titik di kedua partisi tersebut.

- **graf bipartit lengkap**





- **Graf Bagian (*Subgraph*)**

  Sebuah graf K disebut **graf bagian (*subgraph*)** dari graf G, dinotasikan $K \subseteq G$, jika $V(K) \subseteq V(G)$ dan $E(K) \subseteq E(G)$.

- Graf bagian dapat diperoleh melalui suatu operasi **penghapusan titik atau penghapusan sisi** pada sebuah graf.

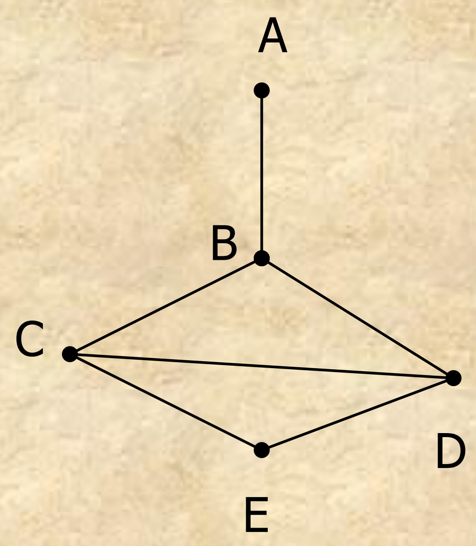
- **Graf Komplemen**

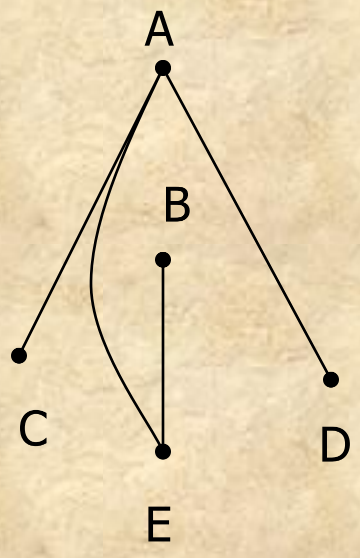
  Komplemen dari sebuah graf G, dinotasikan G', adalah sebuah graf dengan himpunan titik yang sama seperti dalam G dan dengan sifat bahwa dua titik di G bertetangga jika dan hanya jika dua titik yang sama dalam G' tidak bertetangga.

- **Graf Isomorfik (*Isomorphic Graph*)**

  Sebuah graf G disebut isomorfik dengan graf H jika terdapat pemetaan satu-satu Φ (yang disebut isomorfisme dari $V(G)$ ke $V(H)$) sedemikian sehingga Φ mempertahankan ketetanggaan. Jadi, $(u,v) \in E(G)$ jika dan hanya jika $(\Phi(u), \Phi(v)) \in E(H)$. Jika G isomorfik dengan H, kita tulis $G \cong H$.

■ Graf Komplemen





- **G** **G’**

- **Graf Terhubung (*Connected Graph*)**

  Setiap graf G terdiri atas beberapa graf bagian. **Komponen** graf adalah jumlah maksimum graf bagian dalam sebuah graf G. Sebuah graf disebut **terhubung** (*connected*) jika graf tersebut hanya terdiri atas satu bagian (satu komponen).

- **Definisi**

  *Sebuah **himpunan pemotong** (cutset) pada sebuah graf terhubung G adalah sebuah himpunan S yang memuat sisi-sisi dengan sifat-sifat berikut:*

  a. penghapusan semua sisi pada S membuat G menjadi tak terhubung;

  b. penghapusan beberapa sisi pada S (tapi tidak semuanya) tidak mengakibatkan G tak terhubung.

- **Definisi**

Himpunan pemotong dengan hanya satu sisi disebut ***jembatan*** *(bridge).*

- **Definisi**

Keterhubungan sisi *(edge connectivity) pada graf terhubung G, yang dilambangkan dengan* $\lambda(G)$*, adalah banyaknya sisi paling sedikit yang dapat dihapus, demikian sehingga graf G menjadi graf tak terhubung. Jika* $\lambda(G) \geq k$*, maka G disebut graf terhubung dalam k-sisi.*

- **Definisi**

Sebuah titik pemotong *adalah sebuah titik tunggal yang penghapusannya mengakibatkan sebuah graf terhubung menjadi graf tak terhubung.*

- **Definisi**

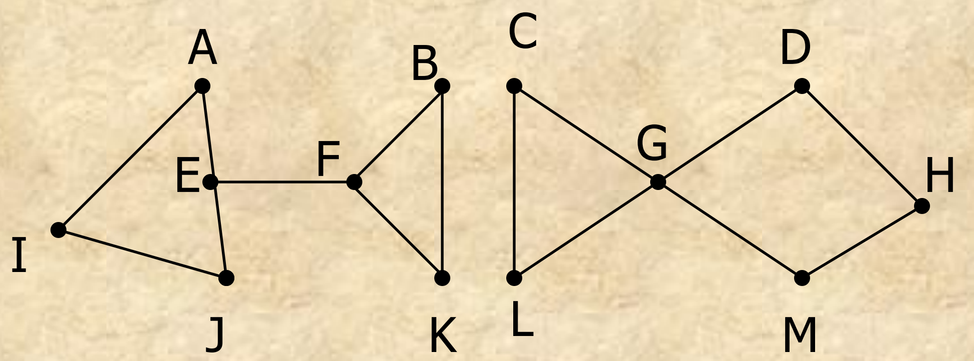
Keterhubungan titik *$\kappa(G)$ dari graf terhubung G adalah jumlah titik paling sedikit yang penghapusannya mengakibatkan G tak terhubung. Jika $\kappa(G) \geq k$, maka graf G disebut terhubung dengan k-titik.*

jembatan *(bridge) :* EF

titik pemotong : E, F, G

$\lambda(G) = 1$ dan $\lambda(G) = 2$

$\kappa(G) = 1$ dan $\kappa(G) = 1$



- **4 Graf Euleur dan Graf Hamilton**

  Sebuah sirkit/jejak tertutup (*closed trail*) pada graf *G* yang memuat semua sisi *G* disebut **sirkit Euler**. Sebuah graf yang memuat sirkit Euler disebut **graf Euler** (*Eulerian graph*). Apabila jejak Euleur tidak disyaratkan harus tertutup, maka graf ini disebut **graf semi-Euleur** (*semi-Eulerian graph*)**.**

- Sebuah siklus yang memuat semua titik sebuah graf disebut **siklus Hamilton**. Graf yang memuat siklus Hamilton disebut **graf Hamilton** (*Hamiltonian Graph*). Apabila siklus ini tidak tertutup, maka graf ini disebut **graf semi-Hamilton** (*semi-Hamiltonian graph*).

- **Teorema**

  Suatu graf terhubung adalah graf semi Euler jika dan hanya jika graf tersebut hanya mempunyai dua titik berderajat ganjil.

- **Teorema**

  Misalkan G adalah graf terhubung. G adalah graf Euler jika dan hanya jika semua titik pada G mempunyai derajat genap.

- **Teorema (Teorema Dirac, 1952)**

  Jika G adalah graf sederhana dengan $n \geq 3$ buah titik, dan jika $d(v) \geq n/2$ untuk setiap titik v, maka G adalah graf Hamilton.

- **Teorema (Teorema Ore, 1960)**

  Misalkan G adalah graf sederhana dengan $n \geq 3$ titik sedemikian sehingga $d(u)+d(v) \geq n$ untuk setiap pasang titik u dan v yang tidak bertetangga, maka G adalah graf Hamilton.

- **Beberapa Aplikasi Graf**

  Persoalan **lintasan terpendek** (*shortest path*), persoalan **pedagang keliling** (*travelling salesperson*), dan persoalan **tukang pos Cina** (*Chinese postman*).

5 Pohon (*Tree*)

- **Definisi**

  Pohon *ialah graf terhubung yang tidak memiliki siklus/lingkaran*.

- **Teorema**

  Jika T pohon, maka untuk setiap dua titik u dan v yang berbeda di T terdapat tepat satu lintasan (path) yang menghubungkan kedua titik tersebut.

- **Teorema**

  Banyaknya titik dari sebuah pohon T sama dengan banyaknya sisi ditambah 1 atau ditulis :

  Jika T pohon, maka $|V(T)| = |E(T)| + 1$.

- **Teorema**

Misalkan T adalah graf sederhana dengan n buah titik. Maka, beberapa pernyataan berikut ini ekuivalen:

(a) T adalah pohon.

(b) T tidak memiliki siklus dan mempunyai $m = n - 1$ buah sisi.

(c) T terhubung dan mempunyai $m = n - 1$ buah sisi.

(d) Ada tepat satu lintasan (path) untuk setiap pasang titik di T.

(e) T terhubung dan penghapusan sembarang sisi pada T menghasilkan graf yang tidak terhubung.

(f) T tidak memiliki siklus dan penambahan satu sisi pada T akan menghasilkan hanya satu siklus.

- **Definisi**

  Hutan *(forest) adalah graf yang tidak memiliki siklus.*

- **Definisi**

  Misalkan G adalah sebuah graf terhubung yang bukan pohon. G dapat diubah menjadi pohon dengan cara memutuskan siklus-siklus yang ada, sampai semua siklus di G hilang. Sebuah pohon T yang memuat semua titik di G disebut ***pohon rentang/ pembangun*** *(spanning tree) dari G.*

- **Teorema**

  Graf G terhubung jika dan hanya jika G memuat pohon rentang.

- **Penandaan (*labelling*) pada Graf Pohon**

- **Teorema (Teorema Cayley)**

  Banyaknya pohon bertanda yang berbeda dengan n titik ada sebanyak n^{n-2} buah.

- **Pohon Rentang Minimum**
- Di antara semua pohon rentang di *G*, pohon rentang yang berbobot minimum dinamakan **pohon rentang minimum**
- Algoritma yang dapat digunakan untuk mendapatkan pohon rentang minimum ditemukan oleh **Kruskal**.
- **Pohon Biner**
- Pohon biner adalah pohon yang setiap titik cabangnya mempunyai maksimum dua buah anak.

- Pohon yang semua titiknya terletak di bagian kiri saja atau di bagian kanan saja disebut **pohon condong** (*skewed tree*). Pohon yang condong ke kiri disebut **pohon condong kiri** (*skew left*), dan pohon yang condong ke kanan disebut **pohon condong kanan** (*skew right*).

- Pohon biner penuh (*full binary tree*) adalah pohon biner yang setiap titiknya mempunyai tepat dua buah anak, kiri dan kanan, kecuali titik terbawahnya. Pohon biner penuh dengan tinggi *h* memiliki jumlah daun sebanyak 2^h, sedangkan jumlah seluruh titiknya adalah:

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^h = 2^{h+1} - 1$$

- Salah satu terapan pohon biner adalah **pohon ekspresi** (*expression tree*). Pohon ekspresi ialah pohon biner dengan daun berupa *operand* dan titik dalam berupa *operator*. Tanda kurung tidak lagi diperlukan bila suatu ekspresi aritmetik direpresentasikan sebagai pohon biner.

- Pohon ekspresi digunakan oleh *compiler* bahasa tingkat tinggi untuk mengevaluasi ekspresi yang ditulis dalam notasi *infix, postfix,* dan *prefix.* Ekspresi **(*a* + *b*)*(*c*/(*d* + *e*))** adalah dalam bentuk *infix*, sedangkan ekspresi *prefix* nya adalah **** + a b / c + d e*** dan ekspresi *postfix* nya adalah

  ***a b + c d e + / **.**

6 Graf Planar (*Planar Graph*)

- Sebuah graf *G* disebut **planar**, jika *G* dapat digambar pada bidang datar sedemikian hingga sisi-sisinya tidak ada yang saling ”berpotongan”, kecuali mungkin pada titik-titik akhir dari sisi-sisi tersebut.

- **Teorema**

  (Teorema Kuratowski, 1930)
- *Sebuah graf G nonplanar jika dan hanya jika G memuat sebuah graf bagian yang homeomorfik dengan graf $K_{3,3}$ atau K_5.*

- ***Teorema (Formula Euler)***
- *Jika G graf bidang terhubung, maka*

  $| V(G) | - | E(G) | + | F(G) | = 2.$

- **Graf Dual (*Dual Graph*)**
- **Lemma:**

Jika G adalah graf bidang dan terhubung dengan n titik, m sisi, dan f muka, maka graf dualnya G^* akan mempunyai $n^* = f$ titik, $m^* = m$ sisi, dan $f^* = n$ muka.

- **Pewarnaan Graf**
- Mewarnai sebuah graf berarti memberi warna pada setiap titik graf itu sedemikian hingga titik yang berdekatan mendapat warna berbeda.
- Bila suatu graf *G* dapat diwarna dengan tidak kurang dari *n* warna, maka *G* dikatakan memiliki **bilangan khromatik (χ(G)) *n***.

- Secara umum, jika suatu siklus memiliki titik yang banyaknya genap, maka siklus itu dapat diwarnai menggunakan dua warna.
- Graf lengkap K_n dapat diwarnai dengan menggunakan n warna. Karena setiap titik saling berdekatan dengan titik lainnya, maka kurang dari n warna tidak cukup untuk mewarna graf itu. Jadi K_n memiliki bilangan khromatik n.

- *Suatu graf G bukan nol tidak memiliki siklus yang panjangnya ganjil, jika dan hanya jika G dapat diwarna dengan 2 warna.*
- ***Pewarnaan Sisi***
- *Jumlah warna minimal yang dapat digunakan untuk mewarnai sisi-sisi dalam suatu graf G disebut indeks khromatik G dinotasikan $\chi'(G)$.*

- *Jika G adalah graf sederhana yang derajat maksimum titiknya adalah m, maka indeks khromatiknya $\chi'(G)$ adalah :*

$$m \leq \chi'(G) \leq m+1.$$

- *Jika G adalah graf sederhana bipartit yang derajat maksimum titiknya $(\Delta(G))$ adalah m, maka $\chi'(G) = m$.*

Terima Kasih