RELASI BINER

1. Hasil Kali Cartes

Definisi: Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong. Hasil kali Cartes dari A dan B yang dilambangkan A x B adalah himpunan

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Contoh : Diketahui himpunan A = {1, 2, 3} dan B = {a, b}.

Hasil kali Cartes dari A dan B adalah

A x B = {(1, a), (1,b), (2,a), (2, b), (3, a), (3, b)}

dan hasil kali Cartes dari B dan A adalah

B x A = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)}

2. Relasi Biner

Definisi: Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong. Setiap himpunan bagian tak kosong dari A x B disebut *relasi biner* (atau secara singkat disebut *relasi*) dari A ke B.

Sifat-sifat Relasi Biner:

* Sifat refleksif
* Sifat simetris
* Sifat transitif
* Sifat antisimetris

a. Sifat Refleksif

Definisi: Misalkan R adalah relasi pada A (relasi dari A ke A). R dikatakan *refleksif* jika untuk setiap x ϵ A, maka (x, x) ϵ R.

Contoh 1: Diketahui A = {-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}. Sebuah relasi R pada A didefinisikan sebagai berikut

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy > 0\}$$

periksa apakah R refleksif atau tidak.

Contoh2: Diketahui B = {1, 2, 3, 4, 5}. Sebuah relasi R pada B didefinisikan sebagai berikut

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in B, xy > 0\}$$

periksa apakah R refleksif atau tidak.

b. Sifat Simetris

Definisi: Misalkan R adalah relasi pada A. R dikatakan *simetris* jika untuk setiap x, y ϵ A dengan x*R*y, maka y*R*x.

Contoh1: Diketahui A = {-2, -1, 0, 1, 2}. Sebuah relasi R didefinisikan sebagai berikut

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy > 0\}$$

Periksa apakah R simetris atau tidak.

Contoh2: Diketahui A = {-2, -1, 0, 1, 2}. R adalah relasi pada A yang didefinisikan sebagai berikut

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y\}$$

Periksa apakah R simetris atau tidak.

c. Sifat Transitif

Definisi: Misalkan R adalah relasi pada A. R dikatakan *transitif* jika untuk setiap x, y, z ϵ A dengan x*R*y dan y*R*z, maka x*R*z.

Contoh1: Diketahui A = {-1, 0, 1}. R adalah suatu relasi yang didefinisikan sebagai berikut

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \geq y\}$$

Periksa apakah R transitif atau tidak.

Contoh2: Misalkan A = {a, b, c} dan relasi R didefinisikan sebagai berikut

$$R = \{(a, b), (c, b), (b, a), (a, c)\}$$

Periksa apakah R transitif atau tidak.

d. Sifat Antisimetris

Definisi: Misalkan R adalah relasi pada A. R dikatakan *antisimetris* jika untuk setiap x, y ϵ A dengan x*R*y dan y*R*x, maka x = y.

Contoh1: Diketahui A = {-2, -1, 0, 1, 2}. Sebuah relasi R didefinisikan sebagai berikut

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in A, y = |x|\}$$

Periksa apakah R antisimetris atau tidak.

Contoh2: Diketahui A = {a, b, c} dan relasi R didefinisikan sebagai berikut

$$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$$

Periksa apakah R antisimetris atau tidak.

3. Relasi Ekivalen

Definisi: Misalkan R adalah relasi pada A. R disebut *relasi Ekivalen* jika R memenuh tiga syarat yakni refleksif, simetris, dan transitif. Dalam hal ini, apabila x*R*y, maka dikatakan bahwa y ekivalen dengan x.

Contoh1: Misalkan A = {1, 2, 3, 4} dan relasi R didefinisikan sebagai berikut

R = {(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)}

Periksa apakah R ekivalen atau tidak.

Contoh2: Misalkan A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} dan R = {(x, y) | x – y habis dibagi 3}. Perlihatkan bahwa R adalah suatu relasi ekivalen.

Contoh3: Misalkan R relasi pada himpunan bilangan riil demikian sehingga x*Ry* jika dan hanya jika x dan y anggota bilangan riil yang berbeda kurang dari 1, |x – y| < 1. apakah relasi R ekivalen.

Latihan

1. Misalkan {1, 2, 3, 4} merupakan relasi pada R,

   R_1 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)},

   R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)},

   R_3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)},

   R_4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)},

   R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)},

   R_6 = {(3,4)}.

a. Manakah dari relasi tersebut yang refleksif?

b. Manakah dari contoh di atas yang merupakan relasi simetris dan antisimetris?

c. Manakah dari contoh tersebut yang merupakan relasi transitif?

2. Berikut ini relasi pada bilangan bulat,

   $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$

   $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$

   $R_3 = \{(a, b) \mid a = b$ atau $a = -b\}$

   $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$

   $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$

   $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3 \}$

   Manakah contoh di atas yang merupakan relasi semetris dan anti simetris dan juga merupakan relasi transitif?

Latihan

Soal-soal Latihan

1. Jika diketahui A = {1, 4, 6, 7} dan B = {8, 9, 10} maka tentukan hasil kali Cartes.
   a. A x B
   b. B x A
   c. A x A
   d. B x B
2. Diketahui A = {1, 2, 3, 4}, dan R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)}. Periksa apakah R memenuhi sifat refleksif, simetris, transitif, dan antisimetris.
3. Diketahui A = {1, 2, 3, 4}, dan R = {(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)}. Periksa apakah R memenuhi sifat refleksif, simetris, transitif, dan antisimetris.
4. Diketahui S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Sebuah relasi R didefinisika sebagai berikut

   R = {(x, y)| x + y = 10}

   sifat relasi mana yang dipenuhi oleh R.
5. Untuk soal-soal berikut ini, relasi mana pada himpunan A yang merupakan relasi ekivalen
   a. A = {a, b, c, d}; R = {(a, a), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, c)}
   b. A = {1, 2, 3, 4, 5}; R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (3,2), (5, 5)}
   c. A = {1, 2, 3, 4}; R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (1, 3), (4, 1), (4, 4)}
6. Misalkan A = {a, b, c} dan B = {x, y}. Hasil kali Cartes dari B dan A adalah…

Himpunan Terurut Bagian (POSET)

1. Poset

Definisi: Himunan P dengan relasi R pada P dinamakan *poset* jika R memenuhi sifat refleksif, antisimetris, dan transitif.

Contoh1: Misalkan Z adalah himpunan semua bilangan bulat positif.

Relasi ≤ (lebih kecil atau sama dengan) adalah sebuah relasi pada Z. Periksa apakah himpunan Z dengan relasi ≤ atau dinotasikan (Z, ≤) merupakan poset atau bukan.

Contoh2: Misalkan Z adalah himpunan semua bilangan bulat positif. Periksa apakah relasi < pada Z merupakan poset atau bukan.

2. Rantai

Definisi: Misalkan $(P, \leq)$ sebuah poset. Jika untuk setiap $x, y \in P$ berlaku $x \leq y$ atau $y \leq x$, maka $(P, \leq)$ disebut *rantai*.

Contoh1: Misalkan Z adalah himpunan semua bilangan bulat positif.

Relasi $\leq$ (lebih kecil atau sama dengan) adalah sebuah relasi pada Z. periksa apakah poset tersebut rantai atau bukan.

Contoh2: Misalkan R adalah himpunan semua bilangan real. Periksa apakah

a) $(R, \leq)$ poset atau bukan

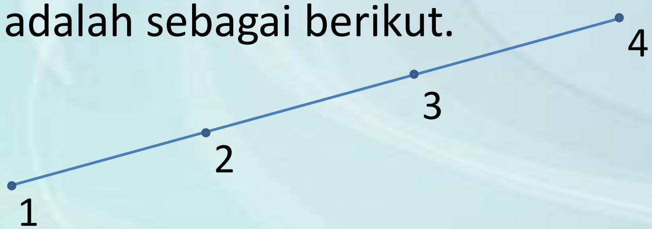
b) $(R, \leq)$ rantai atau bukan

3. Diagram Hasse Poset

Misalkan (P, ≤) adalah sebuah poset. Jika P hingga, maka (P, ≤) dapat dinyatakan dalam bentuk diagram yang dikenal sebagai diagram *Hasse*.

Misalkan a, b ϵ P, a ≤ b, a ≠ b dan tak ada anggota lain c sedemikian sehingga a ≤ b ≤ c, maka relasi a ≤ b dinyatakan dengan rantai langsung dengan posisi b di atas a. ilustrasinya dapat dibuat sebagai berikut.

Contoh1: Misalkan P = {1, 2, 3, 4} dan ≤ didefinisikan sebagai relasi “lebih kecil atau sama dengan”. Dapat diperiksa bahwa (P, ≤) merupakan sebuah rantai. Diaram Hasse untuk (P, ≤) adalah sebagai berikut.



Contoh2: Misalkan X = {2, 3, 6, 12, 24, 36}. Relasi ≤ didefinisikan sebagai x ≤ y jika x membagi y (x, y ϵ X). Gambarlah diagram Hasse utuk (X, ≤).

Contoh3: Misalkan A adalah sebuah himpunan hingga dan p(A) adalah himpunan kuasanya. Misalkan $\subseteq$ merupakan relasi inklusi pada elemen-elemen dari p(A). Gambarlah diagram Hasse (p(A), $\subseteq$) jika

a) A = {a}

b) A = {a, b}

c) A = {a, b, c}

d) A = {a, b, c, d}

4. Batas Atas dan Batas Bawah

Definisi: Misalkan (P, ≤) adalah sebuah poset dan a, b ϵ P. Elemen c ϵ P disebut *batas atas* dari {a, b} jika a ≤ c dan b ≤ c. Sebaliknya d dinamakan *batas bawah* dari {a, b} jika d ≤ a dan d ≤ b.

Contoh1: Misalkan X = {2, 3, 6, 12, 24, 36}. Didefinisikan x ≤ y sebagai y habis dibagi x.

a) Gambarlah diagram Hasse dari (x, ≤)

b) Carilah batas atas dari {2, 3}

c) Carilah batas bawah dari {24, 36}

4. Supremum (batas atas terbesar) & Infimum(batas atas terkecil)

Definisi: Misalkan (P, ≤) adalah poset dan a, b ϵ P. Jika ada c ϵ P sehingga c batas atas dari {a, b} dan untuk setiap batas d dari {a, b} berlaku c ≤ d, maka c dinamakan *batas atas terkecil* atau *supremum* dari {a, b} dan dilambangkan c = a ⊕ b.

Sebaliknya jika ada p ϵ P sehingga p batas bawah dari {a, b} dan untuk setiap batas q dari {a, b} berlaku q ≤ p, maka p dinamakan *batas bawah terbesar* atau *infimum* dari {a, b} dan dilambangkan p = a * b.

Contoh1: Misalkan = {2, 5, 10, 20, 40, 100}. Didefinisikan x ≤ y sebagai y habis dibagi oleh x.

a) Buatlah diagram Hasse untuk (X, ≤)

b) Tentukan batas atas dari {2, 5}

c) Tentukan batas bawah dari {40, 100}

d) Tentukan supremum dari {2, 5}

e) Tentukan infimum dari {40, 100}

Teorema:

Misalkan (P, $\leq$) adalah poset dan a, b $\in$ P.

(i) Jika supremum {a, b} ada, maka supremum tersebut tunggal.

(ii) Jika infimum {a, b} ada,maka infimum tersebut tunggal.

teorema

Latihan

1. Mialkan A adalah himpunan bilangan asli. Relasi ≥ (lebih besar sama dengan) adalah sebuah relasi pada A. Periksa (A, ≥) merupakan poset atau bukan. Jika (A, ≥) poset, periksa apakah (A, ≥) rantai atau bukan.
2. Misalkan A adalah himpunan semua faktor dari bilangan bulat positif m. Didefinisikan x ≤ y sebagai y habis dibagi oleh x. Buatlah diagram Hasse untuk
   a) m = 12
   b) m = 45
3. Misalkan A = {2, 3, 4, 6, 12, 18, 24, 36}. Didefinisikan x ≤ y sebagai y habis dibagi x.
   a) Buatlah diagram Hasse dari {a, ≤}
   b) Tentukkan batas atas dari {2, 3}
   c) Tentukkan batas bawah dari {24, 36}
   d) Tentukkan supremum dari {2, 3} bila ada
   e) Tentukkan infimum dari {24, 36} bila ada

Latihan