

# TEORI KONGRUENSI

# SIFAT DASAR KONGRUENSI

## Definisi 4.1

Misalkan  $n \in \mathbb{N}$ .  $a, b \in \mathbb{Z}$  dikatakan kongruen modulo  $n$ , dinotasikan  $a \equiv b \pmod{n}$ , jika  $n$  membagi  $a-b$ . Berarti  $a-b = kn$  untuk  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Contoh:

- $3 \equiv 24 \pmod{7}$ ,  $-31 \equiv 11 \pmod{7}$ ,  $-15 \equiv -64 \pmod{7}$ , karena  $3-24 = (-3)7$ ,  $-31-11=(-6)7$ , dan  $-15-(-64)=7\cdot7$ .
- Setiap dua bilangan adalah kongruen modulo 1.
- Jika dua bilangan keduanya ganjil atau keduanya genap, maka kedua bilangan tersebut kongruen modulo 2.

Jika  $n \nmid (a-b)$ , maka dikatakan  $a$  tidak kongruen dengan  $b$  modulo  $n$ , dinotasikan  $a \not\equiv b$ .

## Contoh:

$25 \not\equiv 12 \pmod{7}$ , karena  $7 \nmid (25-12)$

- Diberikan  $a \in \mathbb{Z}$ , misalkan q dan r adalah hasil bagi dan sisa pembagian oleh n, jadi  $a = qn + r$ , dengan  $0 \leq r < n$ .
- Berdasarkan definisi kongruensi  $a \equiv r \pmod{n}$ . Karena ada n pilihan untuk r, maka setiap bilangan bulat kongruen modulo n dengan tepat satu dari  $0, 1, 2, \dots, n-1$ .
- $a \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid a$ .
- $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  disebut himpunan sisa positif modulo n.
- Koleksi bilangan bulat  $a_1, a_2, \dots, a_n$  membentuk himpunan lengkap sisa modulo n jika setiap bilangan bulat kongruen modulo n dengan satu dan hanya satu  $a_k$ .
- $a_1, a_2, \dots, a_n$  kongruen modulo n dengan  $0, 1, 2, \dots, n-1$ .

### Contoh:

$\{-12, -4, 11, 13, 22, 82, 91\}$  adalah himpunan lengkap sisa modulo 7, karena

$-12 \equiv 2, -4 \equiv 3, 11 \equiv 4, 13 \equiv 6, 22 \equiv 1, 82 \equiv 5, 91 \equiv 0$  semua modulo 7.

## Teorema 4.1

$a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a$  dan  $b$  mempunyai sisa tak negatif yang sama jika dibagi  $n$ .

### Bukti:

- $(\Rightarrow)$
- $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a = b + kn$ , untuk suatu  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $b$  dibagi  $n$  mempunyai sisa  $r \Rightarrow b = qn + r$ , dengan  $0 \leq r < n$ .
- $\Rightarrow a = b + kn = (qn + r) + kn = (q + k)n + r$ .
- $\Rightarrow a$  dan  $b$  mempunyai sisa yang sama jika dibagi  $n$ .
- $(\Leftarrow)$
- Misalkan  $a = q_1n + r$  dan  $b = q_2n + r$ , dengan  $0 \leq r < n$ .
- $\Rightarrow a - b = (q_1n + r) - (q_2n + r) = (q_1 - q_2)n \Rightarrow n|(a-b) \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$ . □

### Contoh:

- -56 dan -11 dapat dinyatakan dalam bentuk  $-56 = (-7)9 + 7$ ,  $-11 = (-2)9 + 7 \Rightarrow -56 \equiv -11 \pmod{9}$ .
- $-31 \equiv 11 \pmod{7} \Rightarrow -31$  dan 11 mempunyai sisa yang sama jika dibagi 7, yaitu  $-31 = (-5)7 + 4$ ,  $11 = 1 \cdot 7 + 4$ .

## Teorema 4.2

Diberikan  $n \in \mathbb{N}$  dan  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , sebarang. Maka

- (1)  $a \equiv a \pmod{n}$ .
- (2)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$ .
- (3)  $a \equiv b \pmod{n}$  dan  $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$ .
- (4)  $a \equiv b \pmod{n}$  dan  $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a+c \equiv b+d \pmod{n}$  dan  $ac \equiv bd \pmod{n}$ .
- (5)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a+c \equiv b+c \pmod{n}$  dan  $ac \equiv bc \pmod{n}$ .
- (6)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{n}$  untuk  $k \in \mathbb{Z}$ , sebarang.

### Bukti:

- (1)  $\forall a \in \mathbb{Z}$  berlaku  $a-a = 0 \cdot n \Rightarrow a \equiv a \pmod{n}$ .
- (2)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a-b = kn$  untuk suatu  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow b-a = -(kn) = (-k)n$ .  
 $-k \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$ .
- (3)  $a \equiv b \pmod{n}$ ,  $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow \exists h, k \in \mathbb{Z} \ni a-b = hn$  dan  $b-c = kn \Rightarrow$   
 $a-c = (a-b) + (b-c) = hn + kn = (h+k)n \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$ .
- (4)  $a \equiv b \pmod{n}$  dan  $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow \exists h, k \in \mathbb{Z} \ni a-b = hn$  dan  $c-d = kn \Rightarrow$   
 $(a+c) - (b+d) = hn - kn = (h-k)n \Rightarrow a+c \equiv b+d \pmod{n}$   
dan

$ac = (b+hn)(d+kn) = bd + (hd + bk + hkn)n$ , karena  $hd + bk + hkn \in \mathbb{Z} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{n}$ .

(5)  $c \equiv c \pmod{n}$  dan (4) berlaku (5)

(6) Jelas (6) berlaku untuk  $k = 1$ .

Asumsikan berlaku untuk  $k = n \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{n} \Rightarrow aa^n \equiv bb^n \pmod{n}$   
 $\Rightarrow a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod{n}$ . Jadi  $\forall k \in \mathbb{N}$  berlaku  $a \equiv b \pmod{n}$   
 $\Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{n}$

□

### Contoh:

- Buktikan  $2^{20} - 1$  dapat dibagi 41.

Bukti:

$$2^5 \equiv -9 \pmod{41} \Rightarrow (2^5)^4 \equiv (-9)^4 \pmod{41} \Rightarrow 2^{20} \equiv 81 \cdot 81 \pmod{41}.$$

$$81 \equiv -1 \pmod{41} \Rightarrow 81 \cdot 81 \equiv 1 \pmod{41} \Rightarrow 1 \equiv 81 \cdot 81 \pmod{41}$$

$$\Rightarrow 2^{20} - 1 \equiv (81 \cdot 81 - 81 \cdot 81) \pmod{41} \Rightarrow 2^{20} - 1 \equiv 0 \pmod{41} \Rightarrow 41 | 2^{20} - 1$$

□

- Hitung sisa pembagian  $1! + 2! + \dots + 100!$  oleh 12.

Jawab:

$$4! = 24 \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow k! = 4!.5.6\dots.k \equiv 0 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow 1!+2!+\dots+100! \equiv 1!+2!+3!+0+0 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow 1!+2!+\dots+100! \equiv 1!+2!+3!+0+0 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow 1!+2!+\dots+100! \equiv 9 \pmod{12}$$

Jadi sisanya adalah 9.

### Teorema 4.3

Jika  $ca \equiv cb \pmod{n}$ , maka  $a \equiv b \pmod{n/d}$ , dengan  $d = \text{ppb}(c,n)$ .

Bukti:

- $c(a - b) = ca - cb = kn$ , untuk suatu  $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{ppb}(c,n) = n \Rightarrow \exists r, s$  yang relatif prima  $\ni c = dr, n = ds$ .
- $\Rightarrow r(a - b) = ks \Rightarrow s|r(a-b) \Rightarrow a \equiv b \pmod{n/d}$ .

□

### Akibat 1

Jika  $ca \equiv cb \pmod{n}$  dan  $\text{ppb}(c, n) = 1$ , maka  $a \equiv b \pmod{n}$ .

## Akibat 2

Jika  $ca \equiv cb \pmod{p}$  dan  $p \nmid c$ , dengan  $p$  bilangan prima, maka  $a \equiv b \pmod{p}$ .

### Bukti:

$p \nmid c$  dan  $p$  bilangan prima  $\Rightarrow \text{ppb}(a, b) = 1$ .

### Contoh:

- $33 \equiv 15 \pmod{9} \Rightarrow 3.11 \equiv 3.5 \pmod{9}$   
 $\text{ppb}(3,9) = 3 \Rightarrow 11 \equiv 5 \pmod{3}$
- $-35 \equiv 45 \pmod{8} \Rightarrow 5.(-7) \equiv 5.9 \pmod{8}$ .  
 $r$  dan 8 relatif prima  $\Rightarrow -7 \equiv 9 \pmod{8}$ .

## Soal:

1. Buktikan:

- (a)  $a \equiv b \pmod{n}$ ,  $m|n \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$
- (b)  $a \equiv b \pmod{n}$ ,  $c > 0 \Rightarrow ca \equiv cb \pmod{n}$
- (c)  $a \equiv b \pmod{n}$ ,  $a,b,n$  dapat dibagi oleh  $d > 0 \Rightarrow a/d \equiv b/d \pmod{n/d}$

2. Berikan contoh yang memperlihatkan bahwa  $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$  tidak mengakibatkan  $a \equiv b \pmod{n}$ .

3.  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow \text{ppb}(a,n) = \text{ppb}(b,n)$ .

4. (a) Tentukan sisanya jika  $2^{50}$  dan  $4^{65}$  dibagi oleh 7.

(b) Berapakah sisanya jika  $1^5 + 2^5 + \dots + 100^5$  dibagi oleh 4?

5. Buktikan:

(a)  $a$  ganjil  $\Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .

(b)  $\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^3 \equiv 0, 1, \text{ atau } 8 \pmod{9}$ .

(c)  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a$  tidak dapat dibagi oleh 2 atau 3  $\Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{24}$ .

6. Buktikan  $89|(2^{44} - 1)$  dan  $97|(2^{48} - 1)$ .

7. Buktikan:

(a)  $ab \equiv cd \pmod{n}$  dan  $b \equiv d \pmod{n}$ , dengan  $\text{ppb}(b,n) = 1 \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$

(b)  $a \equiv b \pmod{n_1}$ ,  $a \equiv c \pmod{n_2} \Rightarrow b \equiv c \pmod{n}$ , dengan  $n = \text{ppb}(n_1, n_2)$