UJI KETERBAGIAN KHUSUS

Diberikan $b \in Z$, $b > 1$. $N \in Z$, $N > 0$, dapat dituliskan secara tunggal sebagai

$$N = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \dots + a_1 b + a_0,$$

dengan koefisen a_k mengambil nilai yang berbeda dari 0, 1, …, b-1.

Bukti:

(1) Algoritma pembagian untuk bilangan bulat q_1 dan a_0

$$N = q_1 b + a_0, \qquad 0 \le a_0 < b.$$

Jika $q_1 \ge b$, dapat dilakukan pembagian lagi

$$q_1 = q_2 b + a_1, \qquad 0 \le a_1 < b.$$

$$\Rightarrow \qquad N = (q_2 b + a_1)b + a_0 = q_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

Selama $q_2 \ge b$, dapat dilakukan langkah yang sama sehingga diperoleh

$$N = q_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0, \qquad 0 \le a_2 < b.$$

Karena $N > q_1 > q_2 > \dots \ge 0$ dengan $q_{m-1} = q_m b + a_{m-1}$, $0 \le a_{m-1} < b$ dan $q_m < b$

Maka dengan mengambil $a_m = q_m$ diperoleh

$$N = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

(2) Buktikan ketunggalannya dengan kontradiksi.

$\square$

Penulisan $N = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \dots + a_1 b + a_0$ dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih sederhana $N = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_b$, notasi ini disebut notasi nilai tempat basis b untuk N.

Contoh:

- $1492 = 1.10^3 + 4.10^2 + 9.10 + 2$
- $105 = 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1 = (1101001)_2$
- $(1001111)_2 = 1.2^6 + 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2 + 1 = 79$

Teorema 4.4

Misalkan $P(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ adalah fungsi polinom dari x dengan koefisien c_k. Jika $a \equiv b \pmod{n}$, maka $P(a) \equiv P(b) \pmod{n}$.

Bukti:

$a \equiv b \pmod{n}$, T.4.2 $\Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{n}$ untuk $k = 0, 1, \ldots, m$

$\Rightarrow c_k a^k \equiv c_k b^k \pmod{n}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m} c_k a^k = \sum_{k=0}^{m} c_k b^k \pmod{n}$$

Jadi $P(a) \equiv P(b) \pmod{n}$. □

Bilangan a adalah *solusi* dari polinom $P(x) \equiv 0 \pmod{n}$. jika $P(a) \equiv 0 \pmod{n}$.

Akibat

Jika a adalah solusi dari $P(x) \equiv 0 \pmod{n}$ dan $a \equiv b \pmod{n}$, maka b juga solusinya.

Bukti:

$P(a) \equiv P(b) \pmod{n}$, a solusi dari $P(x) \equiv 0 \pmod{n}$

$\Rightarrow P(b) \equiv P(a) \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow$ b adalah solusi. □

Teorema 4.5

Misalkan $N = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ dengan $0 \leq a_k < 10$, dan misalkan $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$. Maka $9|N$ jika dan hanya jika $9|S$.

Bukti:

$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $10 \equiv 1 \pmod{9}$, T.4.4 $\Rightarrow P(10) \equiv P(1) \pmod{9}$.

$P(N) = N$, $P(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_m = S \Rightarrow N \equiv S \pmod{9}$

$\therefore\ N \equiv 0 \pmod{9} \Leftrightarrow S \equiv 0 \pmod{9}$ □

Teorema 4.6

Misalkan N = $a_m 10_m + a_{m-1} 10_{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ dengan $0 \le a_k < 10$, dan misalkan T= $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^m a_m$. Maka 11|N jika dan hanya jika 11|T.

Bukti:

- Ambil

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

- $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow P(10) \equiv P(-1) \pmod{11}$.
- $P(10) = N$, $P(-1) = T \Rightarrow N \equiv T \pmod{11}$
- $\Rightarrow$ 11|N $\Leftrightarrow$ 11|T.

Contoh:

N = 1.571.724.

- 1+5+7+1+7+2+4 = 27 dapat dibagi 9 $\Rightarrow$ 1.571.724 dapat dibagi 9.
- 4-2+7-1+7-5+2 = 11 dapat dibagi 11 $\Rightarrow$ 1.571.724 dapat dibagi 11.

Soal:

1. Buktikan:
   a. $\forall\ a \in Z$, digit satuan dari a^2 adalah 0, 1, 4, 5, 6, atau 9.
   b. $\forall\ a \in Z$, digit satuan dari a^3 adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9.
2. Tanpa melakukan pembagian, tentukan apakah 176.521.221 dan 149.235.678 dapat dibagi oleh 9 atau 11?
3. a. Buktikan: $\forall\ N \in Z$, $N = a_m b^m + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$, $0 \le a_k \le b-1$
   $\Rightarrow b-1|N \Leftrightarrow b-1|(a_m + \ldots + a_1 + a_0)$.
   b. Berikan kriteria keterbagian dari N oleh 3 dan 8 yang bergantung pada digit dari B jika ditulis dalam basis 9.
   c. Apakah 447836_9 dapat dibagi 3 dan 8?
4. Dengan menggunakan uji-9 atau uji-11, cari digit yang hilang:
   a. 52817 . 3212146 = 169655x15282
   b. $2x99561 = [3(523+x)]^2$.

LITERATUR

Elementary Number Theory, David M.Burton

rinimarwati@upi.edu