ALJABAR

OLEH :

DRS. H. CECE KUSTIAWAN, M.Si.

Meliputi :

- Himpunan
- Fungsi
- Logika Matematika

I. HIMPUNAN

- Pengertian Himpunan
- Macam-macam Himpunan
- Relasi Antar Himpunan
- Diagram Himpunan
- Operasi pada Himpunan
- Aljabar Himpunan

Back

Pengertian Himpunan

1. Apa yang dimaksud dengan himpunan ?
2. Berikan contoh himpunan
3. Berikan contoh yang bukan himpunan □

Definisi

- Himpunan adalah Kumpulan objek-objek (benda-benda real atau abstrak) yang didefinisikan dengan jelas. □

Contoh Himpunan

- Kumpulan mahasiswa Jurusan Pendidikan Biologi FPMIPA UPI
- Kumpulan anak-anak SD Isola
- Kumpulan mahasiswa UPI yang berumur kurang dari 10 tahun

Contoh bukan himpunan

- Kumpulan anak-anak yang berambut gondrong
- Kumpulan makanan yang lezat-lezat
- Kumpulan anak-anak yang pandai

Notasi Himpunan

- Himpunan biasanya dinyatakan dalam huruf kapital ; A, B, C, … atau ditandai oleh dua kurung kurawal, { … }

  Sedangkan anggota himpunan biasanya dinyatakan dalam huruf kecil ; a, b, c, …
- Jika x anggota himpunan A, maka ditulis $x \in$ A
- Jika y bukan anggota himpunan B, maka ditulis $y \notin$ B
- Banyaknya anggota himpunan A ditulis n(A)

Macam-macam Himpunan

- Coba anda sebutkan macam-macam himpunan

Macam-macam Himpunan

- Himpunan kosong
- Himpunan semesta
- Himpunan Bilangan
- Himpunan terhingga (finite) dan tak terhingga (infinite)
- Himpunan Terhitung (countable) dan Tak Terhitung (uncountable)

Macam-macam Himpunan

- Himpunan kosong

  Yaitu himpunan yang tidak mempunyai anggota dan ditulis dengan simbol ø atau { }.
- Himpunan semesta

  Yaitu himpunan yang memuat semua anggota yang sedang dibicarakan, biasanya ditulis dengan simbol S.
- Himpunan Bilangan, terdiri dari ;

  Himpunan Bilangan Asli : N = {1, 2, 3, … }

  Himpunan Bilangan Cacah : C = {0, 1, 2, 3, … }

  Himpunan Bilangan Bulat : Z = { … , -1, 0, 1, … }

  Himpunan Bilangan Rasional : $Q = \{p/q : p, q \in Z, q \neq 0\}$

  Himpunan Bilangan Real : R

Macam-macam Himpunan (lanjutan)

- Himpunan terhingga (finite) dan tak terhingga (infinite)

  Himpunan terhingga (finite) adalah himpunan yang banyak anggotanya terhingga, yaitu himpunan kosong atau himpunan yang mempunyai n elemen.
- Contoh

  $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \varnothing = \{\ \}$

Macam-macam Himpunan (lanjutan)

- Himpunan tak terhingga (infinite atau denumerable) adalah himpunan yang berkorespondensi satu-satu dengan bilangan asli, yaitu himpunan yang banyak anggotanya tak terhingga.
- Contoh

  Himpunan bilangan genap, himpunan bilangan ganjil, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan rasional, dsb.

Macam-macam Himpunan (lanjutan)

- Himpunan Terhitung (countable) dan Tak Terhitung (uncountable)

  Himpunan Terhitung adalah himpunan terhingga atau denumerable. Jadi

Himpunan Terhitung

Himpunan terhingga

Himpunan denumerable

Contoh ;

A = {1, 2, 3, 4}

B = himpunan bilangan ganjil

Macam-macam Himpunan (lanjutan)

- Himpunan tak Terhitung (uncountable) adalah adalah himpunan yang tidak terhitung.

  Contoh :

  R = Himpunan bilangan real □

Relasi Antar Himpunan

- Himpunan sama

  Yaitu dua buah himpunan yang memiliki anggota yang persis sama, tanpa melihat urutannya.
- Himpunan equivalen

  Yaitu dua buah himpunan yang memiliki banyak anggota yang sama. Jika A equivalen B, maka ditulis A ~ B
- Himpunan Bagian

  Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika setiap anggota A termasuk anggota B, ditulis $A \subseteq B$
- Himpunan Kuasa

  Yaitu himpunan yang anggotanya adalah himpunan-himpunan bagian dari suatu himpunan

Contoh Himpunan Kuasa

- Jika A = {a, b, c}, maka himpunan kuasa dari A adalah :

  $2^A = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$

- Jika m adalah banyaknya anggota himpunan A, maka banyaknya anggota himpunan kuasa dari A adalah 2^m

Diagram Himpunan

Terdiri dari :

- Diagram Venn
- Diagram Garis
- Diagram Cartess

Diagram Venn

Cara penulisan diagram Venn

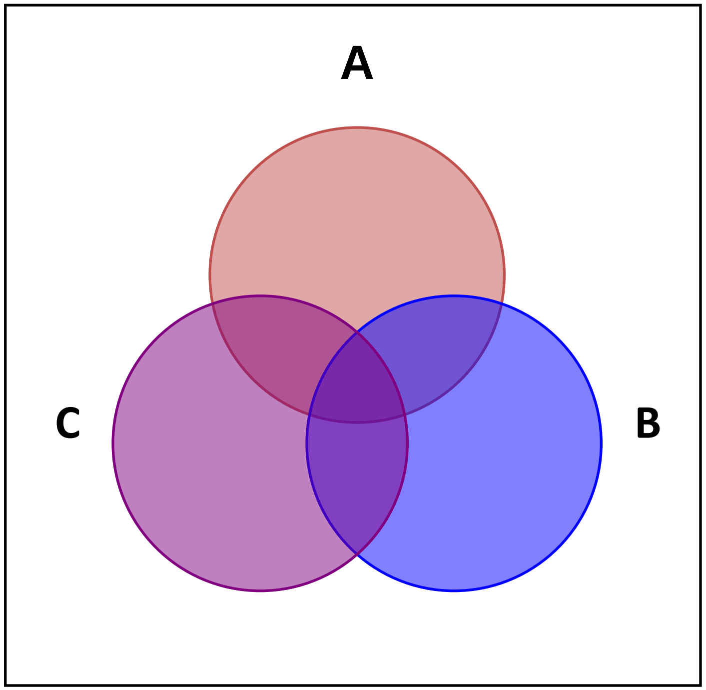


Diagram Garis

Jika A himpunan bagian dari C dan B himpunan bagian dari C, maka ditulis dalam diagram garis sbb;

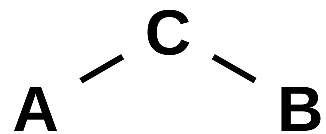


Diagram Cartess

Untuk menggambarkan suatu himpunan bilangan, Rene Descartes menggambarkannya dalam suatu garis bilangan. Garis bilangan ini disebut garis bilangan Cartess.

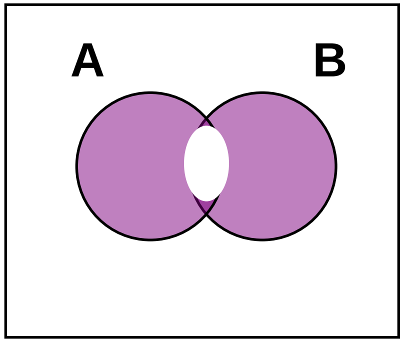
Jika A = $\{x : 0 \leq x < 3\}$, maka digambarkan dalam garis bilangan sbb;

Operasi pada Himpunan

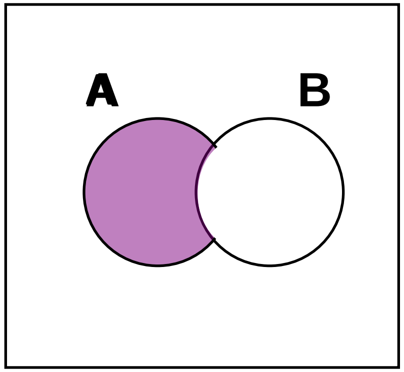
- Irisan
  $A \cap B = \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\}$
- Gabungan
  $A \cup B = \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\}$
- Penjumlahan
  $A + B = \{x : x \in A, x \in B, x \notin (A \cap B)\}$
- Pengurangan
  $A - B = A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$
- Komplemen
  $A^c = \{x : x \notin A, x \in S\}$

Penjumlahan dan Pengurangan dalam Diagram Venn

- $A + B = \{x : x \in A, x \in B, x \notin (A \cap B)\}$



- $A - B = \{x : x \in A, x \notin B\}$



Sifat-sifat Operasi Himpunan

- Sifat komutatif
  $A \cap B = B \cap A$ dan $A \cup B = B \cup A$
- Sifat asosiatif
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Sifat distributif
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Sifat Komplemen
  $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = S$, $(A^c)^c = A$, $S^c = \emptyset$, $\emptyset^c = S$
  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ dan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Sifat-sifat Operasi Himpunan (Lanjutan)

- Sifat pengurangan
  $A - A = \emptyset$, $A - \emptyset = A$, $A - B = A \cap B^c$
  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
- Sifat identitas
  $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap S = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup S = S$
- Sifat idempoten
  $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
- Sifat himpunan bagian
  $(A \cap B) \subseteq A$, $(A \cap B) \subseteq B$, $(A - B) \subseteq A$
  Jika $A \subseteq B$, maka $A \cap B = A$, $A \cup B = B$, $B^c \subseteq A^c$ dan $A \cup (B - A) = B$

Sifat-sifat Operasi Himpunan (Lanjutan)

- Sifat refleksif

  $A = A$, $A \subseteq A$, $A \sim A$
- Sifat simetrik

  Jika $A = B$, maka $B = A$

  Jika $A \sim B$, maka $B \sim A$
- Sifat transitif

  Jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

  Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

  Jika $A \sim B$ dan $B \sim C$, maka $A \sim C$

Aljabar Himpunan

- Sifat-sifat aljabar himpunan
- Prinsip dualitas
- Himpunan Berindeks
- Partisi
- Himpunan bersarang

Sifat-sifat aljabar himpunan

- Hukum idempoten

  $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
- Hukum asosiatif

  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Hukum komutatif

  $A \cap B = B \cap A$ dan $A \cup B = B \cup A$
- Hukum distributif

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Sifat-sifat aljabar himpunan (lanjutan)

- Hukum identitas

  $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap S = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup S = S$

- Hukum komplemen

  $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = S$, $(A^c)^c = A$, $S^c = \emptyset$, $\emptyset^c = S$

- Hukum De Morgan

  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ dan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Prinsip dualitas

- Jika kita menukar $\cup$ dengan $\cap$ dan S dengan $\emptyset$ dalam setiap pernyataan tentang himpunan, maka pernyataan baru tersebut disebut dual dari pernyataan aslinya.
- Contoh

  Dual dari $(S \cup B) \cap (A \cup \emptyset) = A$ adalah $(\emptyset \cap B) \cup (A \cap S) = A$

Himpunan Berindeks

- $J = \{1, 2, 3, 4\}$ disebut himpunan indeks
- $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ disebut himpunan berindeks dan ditulis;

  $\{A_i : i \in J\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$
- Jika $K = \{1, 2, 3, \ldots n\}$, maka

  $\{\cup_i A_i : i \in K\} = \{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\}$
- Jika $K = \{1, 2, 3, \ldots \}$, maka

  $\{\cup_i A_i : i \in K\} = \{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \}$

Contoh himpunan berindeks

Jika $A_1 = \{1\}$

$A_2 = \{1, 2\}$

...

$A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

Tentukan $\{\cup_i A_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan $\{\cap_i A_i : 1 \leq i \leq n\}$

$\{\cup_i A_i : 1 \leq i \leq n\} = \{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\} = A_n$

$\{\cap_i A_i : 1 \leq i \leq n\} = \{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\} = A_1$

Partisi

$\beta = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ disebut partisi dari A, jika memenuhi kedua sifat berikut ;

1) $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$
2) $B_i \cap B_j = \emptyset$, untuk setiap $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$

Contoh partisi

P = {1, 2, 3, …}, Q = {1, 3, 5, …} dan R {2, 4, 6, …}, maka Q dan R adalah partisi dari P, sebab $Q \cup R = P$ dan $Q \cap R = \emptyset$

Himpunan Bersarang

- $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ disebut himpunan bersarang jika memenuhi ;

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$$

- Contoh

  $A_1 = [0,1]$, $A_2 = [0, 1/2]$ … , $A_n = [0, 1/n]$, …

  $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ merupakan himpunan bersarang, sebab $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$

Soal latihan

1. Jika A dan B suatu himpunan buktikan bahwa $A \cup (A \cap B) = A$
2. Misalkan $A_n = \{x : x \text{ kelipatan } n, n \text{ bil asli}\}$, tentukan $A_4 \cap A_6$
3. Misalkan $A_i = [i, i+1]$, $i \in \{\text{bil bulat}\}$, tentukan $A_3 \cap A_4$ dan $A_3 \cup A_4$
4. Misalkan $D_n = (0, 1/n)$, $n \in \{\text{bil asli}\}$, tentukan $D_3 \cap D_7$ dan $D_3 \cup D_7$
5. Cari semua partisi dari $W = \{1, 2, 3\}$

Soal-soal

1. Misalkan $A_n = \{x : x \text{ kelipatan } n, n \text{ bil asli}\}$, tentukan $\cup_{i\in P} A_i$, P = bil prima
2. Misalkan $A_i = [i, i+1]$, $i\in\{\text{bil bulat}\}$, tentukan $\cup_i A_i$
3. Misalkan $D_n = [0, 1/n]$, $n\in A=\{\text{bil asli}\}$, tentukan $\cap_{i\in A} D_i$
4. Misalkan $D_n = (-1/n, 1/n)$, $n\in A=\{\text{bil asli}\}$, tentukan $\cup_{i\in A} D_i$

Back