Aljabar Boole

Meliputi :

1. Definisi Aljabar Boole
2. Prinsip Dualitas dalam Aljabar Boole
3. Teorema Dasar Aljabar Boole
4. Orde dalam sebuah Aljabar Boole

Definisi Aljabar Boole

- Misalkan B adalah himpunan yang anggotanya a, b, x, y, …

  Pada B didefinisikan dua operasi, yaitu jumlah, “+” dan perkalian, “$*$”.

  B disebut Aljabar Boole ditulis dengan notasi {B, +, $*$} jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. Tertutup
2. Komutatif
3. Asosiatif
4. Distributif
5. Unsur identitas
6. Komplemen

Tertutup

- B disebut tertutup jika untuk setiap $x, y \in B$, terdapat jumlah $x+y \in B$ dan perkalian $x*y \in B$

Komutatif

- B disebut komutatif jika untuk setiap $x, y \in B$ berlaku

  $x + y = y + x$

  $x * y = y * x$

Asosiatif

- B disebut asosiatif jika untuk setiap $x, y, z \in B$ berlaku

  $(x + y) + z = x + (y + z)$

  $(x * y) * z = x * (y * z)$

Distributif

- B disebut distributif jika untuk setiap $x, y, z \in B$ berlaku

  $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$

  $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

Unsur identitas

- Terdapat unsur identitas jumlah, yaitu O dan unsur identitas perkalian, yaitu I sehingga untuk setiap $x \in B$ berlaku :

  $x + O = O + x = x$

  $x * \mathrm{I} = \mathrm{I} * x = x$

Komplemen

- Untuk setiap $x \in B$ terdapat komplemen $x' \in B$ sehingga

  $x + x' = \mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$ = unsur identitas operasi $*$)

  $x * x' = O$ (O = unsur identitas operasi $+$)

Contoh Aljabar Boole

- Misalkan B = {1, 0} dan pada B didefinisikan dua operasi + dan $*$ sbb :

+	1	0
1	1	1
0	1	0

$*$	1	0
1	1	0
0	0	0

Apakah {B, +, $*$} Aljabar Boole ?

Untuk memeriksa {B, +, $*$} Aljabar Boole kita periksa ke-6 aksioma di atas.

- Sifat tertutup jelas terpenuhi, sebab setiap $x, y \in B$, maka $x+y \in B$ dan $x*y \in B$
- Sifat komutatif juga terpenuhi, sebab setiap $x, y \in B$ berlaku $x+y = y+x$ dan $x * y = y * x$
- Sifat asosiatif terpenuhi, sebab untuk setiap $x, y, z \in B$ berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$ dan $(x * y) * z = x * (y * z)$

- Sifat distributif terpenuhi, sebab dapat diperlihatkan bahwa untuk setiap x, y, z $\in$ B berlaku $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$ dan $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$
- Pada B ada unsur identitas +, yaitu O=0, sehingga untuk setiap $x \in B$ berlaku $x+0=x$ dan

  ada unsur identitas $*$, yaitu $\mathrm{I} = 1$, sehingga untuk setiap $x \in B$ berlaku $x*1 = x$.
- Untuk setiap $x \in B$ ada komplemen dalam operasi +, yaitu komplemen dari 0 adalah 1, dan komplemen dari 1 adalah 1 atau 0.

  Selanjutnya, untuk setiap $x \in B$ ada komplemen dalam operasi $*$, yaitu komplemen dari 0 adalah 1 atau 0, dan komplemen dari 1 adalah 0.

Catatan

- Unsur identitas pada operasi + tidak selalu 0, tapi tergantung pada operasi yang didefinisikannya.
- Unsur identitas pada operasi $*$ tidak selalu 1, tapi tergantung pada operasi yang didefinisikannya.
- Dari pemeriksaan tersebut, ternyata ke-6 aksioma Aljabar Boole terpenuhi.

  Jadi $\{B, +, *\}$ merupakan Aljabar Boole.

Contoh yang lain

- Misalkan B adalah koleksi himpunan bagian, yaitu himpunan kuasa dari suatu himpunan.

  Pada B didefinisikan dua operasi gabungan dan irisan.

  Buktikan bahwa $\{B, \cup, \cap\}$ merupakan Aljabar Boole.

Prinsip Dualitas dalam Aljabar Boole

- Dual dari sebarang pernyataan sebuah Aljabar Boole {B, +, $*$} adalah pernyataan yang didefinisikan dengan mempertukarkan + dengan $*$ dan anggota-anggota satuannya, yaitu I dengan O dalam pernyataan yang semula.
- Contoh

  Dual dari pernyataan $(I + x) * (y + O) = y$ adalah $(O * x) + (y * I) = y$

Catatan

- Dual dari setiap aksioma Aljabar Boole merupakan sebuah aksioma Aljabar Boole juga.
- Dual dari setiap teorema Aljabar Boole merupakan sebuah teorema Aljabar Boole juga, sehingga pembuktian suatu teorema Aljabar Boole dapat menggunakan dualnya.

Teorema Dasar Aljabar Boole

- Untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan, diperlukan beberapa teorema yang dapat dijadikan sebagai landasan kebenarannya.

  Beberapa teorema dasar Aljabar Boole antara lain :
- Teorema 1 : Hukum Idempoten

  $x + x = x$

  $x * x = x$

Teorema Dasar Aljabar Boole

- Teorema 2

  $x + I = I$

  $x * O = O$
- Teorema 3 : Hukum Involusi

  $(x')' = x$
- Teorema 4

  $I' = O$ dan $O' = I$
- Teorema 5 : Hukum d'Morgan

  $(x + y)' = x' * y'$

  $(x * y)' = x' + y'$

Contoh Pembuktian Teorema

- Akan dibuktikan teorema 1, yaitu $x+x = x$

$x = x + O$	(identitas)
$= x + (x * x')$	(komplemen)
$= (x+x) * (x+x')$	(distributif)
$= (x+x) * I$	(komplemen)
$= x+x$	(identitas)

Selanjutnya, pernyataan $x*x = x$ benar berdasarkan prinsif dualitas.

Contoh Pembuktian Teorema

- Akan dibuktikan teorema 2, yaitu $x+\mathrm{I} = \mathrm{I}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= x + x' && \text{(komplemen)} \\
&= x + (x' * \mathrm{I}) && \text{(identitas)} \\
&= (x+x') * (x+\mathrm{I}) && \text{(distributif)} \\
&= \mathrm{I} * (x + \mathrm{I}) && \text{(komplemen)} \\
&= x + \mathrm{I} && \text{(identitas)}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, pernyataan $x * O = O$ benar berdasarkan prinsif dualitas.

Orde dalam sebuah Aljabar Boole

- Teorema 6

  Misalkan $x,y \in B$ dengan B sebuah Aljabar Boole.

  Maka pernyataan berikut equivalen :

1. $x * y' = 0$
2. $x + y = y$
3. $x' + y = I$
4. $x * y = x$

Definisi

- Misalkan $x,y \in B$ dan B sebuah Aljabar Boole.

  x dikatakan mendahului y jika berlaku satu dari sifat-sifat dalam teorema 6 di atas, dan ditulis dengan notasi ;

$$x \lesssim y$$

Contoh

- Diketahui Aljabar Boole ($\mathcal{A}, \cup, \cap$).

  Jika A,B$\in\mathcal{A}$ maka A dikatakan mendahului B yang berarti A$\subset$B, sebab salah satu dari teorema 6 terpenuhi, yaitu A $\cap$ B' = ø.

  (dalam hal ini ke-4 pernyataan dalam teorema 6 terpenuhi)

Teorema 7

- Hubungan dalam sebuah Aljabar Boole B yang didefinisikan dengan x $\lesssim$ y adalah sebuah orde parsial dalam B, yaitu ;

1. Untuk setiap x$\in$B, maka x $\lesssim$ y (refleksif)
2. Untuk setiap x,y$\in$B, jika x $\lesssim$ y dan y $\lesssim$ x maka x=y (anti simetrik)
3. Untuk setiap x,y,z$\in$B, jika x $\lesssim$ y dan y $\lesssim$ z maka x $\lesssim$ z (transitif)

Teorema 8

- Misalkan $x,y \in B$ dan B sebuah Aljabar Boole, maka berlaku :

1) $x + y = \sup \{x,y\}$
2) $x * y = \inf \{x,y\}$