# 3. FUNGSI DAN GRAFIKNYA

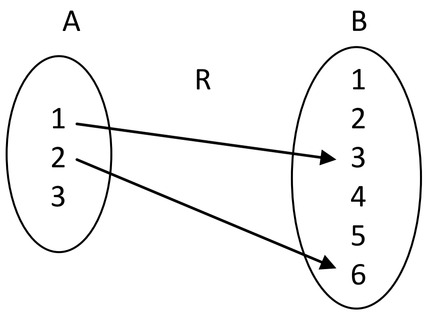
## 3.1 Pengertian Relasi

Misalkan A dan B suatu himpunan. Jika anggota A dikaitkan dengan anggota B berdasarkan suatu hubungan tertentu maka diperoleh suatu **relasi** dari A ke B.

Contoh :

A = {1, 2, 3} dan B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Misalkan relasi dari A ke B adalah relasi "sepertiga dari", maka relasi tersebut dapat digambarkan dalam diagram berikut ;




Himpunan pasangan berurutan ($a$, $b$) dengan $a \in$ A dan $b \in$ B disebut himpunan perkalian A dan B atau produk kartesius A dan B ditulis dengan notasi A x B dan dinyatakan dalam notasi himpunan sbb ;

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Contoh :

Misalkan A = {1, 2, 3} dan B = {4, 5}

Maka A x B = {(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)}

## 3.2 Pengertian Fungsi

Suatu fungsi atau pemetaan $f$ dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B, ditulis ;

$$f: A \rightarrow B$$

Dalam hal ini A disebut domain (daerah asal) dan B disebut kodomain (daerah kawan).

Jika $f$ memetakan satu $x \in$ A ke satu $y \in$ B, maka dikatakan bahwa "$y$ adalah peta dari $x$ oleh $f$" ditulis dengan notasi ; $f: x \rightarrow y$ atau $f: x \rightarrow f(x)$. Himpunan $y \in$ B yang merupakan peta dari $x \in$ A disebut range atau daerah hasil.

Contoh

Tentukan domain, kodomain dan range dari pemetaan berikut ;

$f: A \to B$ dengan $f(x) = 2x$, $x$ bilangan asli A = {2, 3, 4}, B = {4, 5, 6, 7, 8}

**3.3 Macam-macam Fungsi**

a. Fungsi satu-satu/ fungsi into/ fungsi injektif

$f$ : A $\to$ B disebut fungsi satu-satu jika setiap anggota A mempunyai bayangan yang berbeda, dengan kata lain tidak ada dua anggota A yang mempunyai bayangan yang sama didalam B. Jadi jika $f(a_1) = f(a_2)$ maka $a_1 = a_2$ atau jika $a_1 \neq a_2$ maka $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Contoh

1. Jika $f$ : R $\to$ R dengan $f(x) = x^2$, apakah $f$ fungsi satu-satu ?
2. Jika $f$ : R $\to$ R dengan $f(x) = x^3$, apakah $f$ fungsi satu-satu ?

b. Fungsi pada/ fungsi onto/ fungsi surjektif

Misalkan $f$ : A $\to$ B maka range $f(A) \subseteq B$. Jika $f(A) = B$, yaitu setiap $y \in B$ ada $x \in A$ sehingga $f(x) = y$, maka $f$ disebut fungsi pada/ surjektif dari A ke B.

Contoh

1. Jika $f$ : A $\to$ B dengan $f(x) = x^2$, $x$ bilangan real, A = B = $\{x : -1 \leq x \leq 1\}$, apakah $f$ fungsi surjektif ?
2. Jika $f$ : A $\to$ B dengan $f(x) = x^3$, $x$ bilangan real, A = B = $\{x : -1 \leq x \leq 1\}$, apakah $f$ fungsi surjektif ?

c. Fungsi Konstan

Misalkan $f$ : A $\to$ B. Fungsi $f$ disebut fungsi konstan jika setiap anggota A dipetakan ke satu anggota B yang sama. Jadi jika $x \in A$, maka $f(x) = c$ (c konstan).

Contoh

Jika $f(x) = 2$, $x$ bilangan real, maka $f$ merupakan fungsi konstan.

d. Fungsi Satuan/ Fungsi Identitas

$f$ : A $\to$ A dengan $f(x) = x$ disebut fungsi satuan jika $f$ memetakan setiap titik anggota A ke dirinya sendiri.

e. Fungsi kuadrat/ fungsi parabola

$f$ : A $\to$ B dengan $f(x) = ax^2 + bx + c$, dan $a, b, c \in R$ disebut fungsi kuadrat.

f. Fungsi ganjil dan fungsi genap

Suatu fungsi $f$ disebut fungsi ganjil jika $f(-x) = -f(x)$ untuk semua $x$. Grafiknya simetris terhadap titik asal yaitu titik (0,0).

Dan fungsi $f$ disebut fungsi genap jika $f(-x) = f(x)$ untuk semua $x$. Grafiknya simetris terhadap sumbu y.

Contoh

Nyatakan fungsi berikut apakah fungsi ganjil, genap atau tidak keduanya

- $f(x) = 2x + 1$
- $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$
- $h(x) = \frac{x}{x^2-1}$

g. Fungsi Mutlak

Fungsi mutlak dari *x* didefinisikan

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Bagaimana sketsa dari fungsi $f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

h. Fungsi Tangga

Fungsi tangga dari *f* didefinisikan sbb ;

*f*(*x*) = [*x*] = bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*.

Coba sketsa grafik fungsi tersebut !

Bagaimana pula sketsa dari fungsi $(x) = \left[\!\left[\frac{1}{2}x + 1\right]\!\right]$ ?

i. Fungsi Trigonometri

Secara umum fungsi trigonometri dapat ditulis dengan

$$y = \sin f(x)\,, y = \cos f(x)\,, y = \tan f(x) \text{ dsb.}$$

Fungsi trigonometri yang paling sederhana adalah $y = \sin x\,, y = \cos x\,, y = \tan x$ dsb.

Bagaimana bentuk grafiknya ?

Bagaimana grafik dari $= \sin 2x$ ?

j. Fungsi eksponen

*a* pangkat n yang ditulis $a^n$ disebut bentuk eksponensial atau perpangkatan, dengan *a* disebut basis atau bilangan pokok dan n disebut eksponen atau pangkat.

Jika n bilangan bulat positif, maka

$$a^n = \underbrace{a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x} \ldots \text{x } a}_{\text{n faktor}}$$

Secara umum fungsi eksponensial didefinisikan sbb;

$$a^x = e^{x \ln a}, \text{dengan } a > 0 \text{ dan } x \in \mathrm{R}$$

*e* adalah bilangan Euler dengan $e \approx 2{,}718281828459045$

Sifat-sifat Eksponen

Jika $a > 0$, $b > 0$, dan $x$ dan $y$ bilangan real, maka

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$

(ii) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$

(iv) $(ab)^x = a^x\, b^x$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Contoh

Sketsa grafik fungsi $y = 2^x$ , kemudian bandingkan dengan fungsi $y = x^2$.

k. Fungsi Logaritma

Jika $a > 0, a \neq 1$ dan $c > 0$ maka diperoleh hubungan

$$a^b = c \iff \log_a c = b$$

Dengan *a* disebut basis atau bilangan pokok logaritma dan *c* disebut nilai yang dilogaritmakan. Jika basis logaritma adalah 10, maka basis tersebut biasanya tidak ditulis, misalnya $\log_{10} 2 = \log 2$

Contoh

Sketsa grafik fungsi $y = \log x$ dan $y = \ln x$

## 3.4 Operasi pada Fungsi

Jika *f* dan *g* suatu fungsi maka didefinisikan jumlah, selisih, kali dan bagi sbb;

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ asalkan } g(x) \neq 0 \text{ untuk setiap } x$$

Dan daerah asalnya merupakan irisan dari masing-masing fungsi *f* dan *g*.

Contoh

Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = {}^2/_x$ tentukanlah $f + g,\ f - g,\ fg,\ f/g$ dan tentukan pula masing-masing daerah asalnya.

**3.5 Komposisi Fungsi**

a. Pengertian

Jika fungsi $f$ bekerja pada $x$ untuk menghasilkan $f(x)$ dan kemudian $g$ bekerja pada $f(x)$ untuk menghasilkan $g(f(x))$,maka dikatakan bahwa kita telah mengkomposisikan $g$ dengan $f$ . Fungsi yang dihasilkan disebut komposisi $g$ dengan $f$, yang dinyatakan dengan $g \circ f$ . Jadi

$$(g^\circ f)(x) = g(f(x))$$

Jadi, jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ maka $(g \circ f) : A \to C$ dengan syarat $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

b. Contoh

Jika $f(x) = x^2 - 1$ dan $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in R$, tentukan $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ serta tentukan masing-masing daerah asalnya.

**3.6 Invers Fungsi**

a. Syarat fungsi invers

Secara umum, jika $f : A \to B$ maka **invers fungsi** $f$ dinyatakan dengan $f^{-1} : B \to A$.

Jika $y = f(x)$ maka $x = f^{-1}(y)$.

Agar suatu fungsi $f$ mempunyai invers maka

- fungsi tersebut harus bijektif, yaitu fungsi tersebut harus injektif dan surjektif atau
- fungsi tersebut harus monoton kuat dan surjektif.

Untuk melihat fungsi monoton kuat atau tidak bisa dilakukan dengan uji turunan pertama, yaitu jika $f' > 0$ maka $f$ monoton naik kuat dan jika $f' < 0$ maka $f$ monoton turun kuat.

b. Contoh

Tentukan invers fungsi dari fungsi berikut (Jika ada) :

(i) $f(x) = 3x + 9$

(ii) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

(iii) $f(x) = x^3 + 8$

c. Invers fungsi trigonometri

Untuk memperoleh invers fungsi sinus, cosinus, tangen dsb. kita harus membatasi domain dari fungsi tersebut, yaitu ;

Jika $y = \sin x$ maka domainnya adalah $[-\pi/2, \pi/2]$ dan diperoleh

$$y = \sin x \Leftrightarrow x = sin^{-1}\, y$$

Jika $y = \cos x$ maka domainnya adalah $[0, \pi]$ dan diperoleh

$$y = \cos x \Leftrightarrow x = cos^{-1}\, y$$

Jika $y = \tan x$ maka domainnya adalah $(-\pi/2, \pi/2)$ dan diperoleh

$$y = \tan x \Leftrightarrow x = tan^{-1}\, y$$

<u>Contoh</u>

Hitunglah

(i) $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

(ii) $cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

(iii) $\cos(cos^{-1}\, 0{,}6)$

(iv) $tan^{-1}(1)$

d. Invers fungsi komposisi

Sudah kita maklumi bahwa, jika $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ maka $h = (g \circ f) : A \rightarrow C$ dengan syarat $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

Invers fungsi $h$ adalah $h^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1}) : C \rightarrow A$

Jadi jika $h(x) = (g \circ f)(x)$ maka $h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

Contoh

Jika $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$ dan $g(x) = x + 2$ tentukan $(g \circ f)^{-1}$

Soal-Soal

1. Tentukan *x* dari persamaan $5^{2x-3} = 4$
2. Bagaimana hubungan antara $\log_{\frac{1}{2}} x$ dan $\log_2 x$
3. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ dan $(x) = |x + 1|$ , tentukan ($g \circ f$)(x) dan ($f \circ g$)(x) serta tentukan masing-masing daerah asalnya.
4. Tentukan nilai dari

$$\cos\left[2\, sin^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$$

5. Jika $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = 2x - 1$ tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$

Selamat bekerja