FUNGSI

1. Definisi Fungsi
2. Jenis-jenis Fungsi
3. Pembatasan dan Perluasan Fungsi
4. Operasi yang Merupakan Fungsi

Definisi Fungsi

- Suatu fungsi f atau pemetaan f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B, yang biasa ditulis dengan notasi ;

$$f : A \rightarrow B$$

- Himpunan A disebut daerah asal atau domain fungsi f
- Himpunan B disebut daerah kawan atau kodomain dari f.
- Himpunan peta-peta dari B disebut Range atau daerah hasil dari f.

Contoh

- Misalkan $f : R \rightarrow R$ dengan $f(x) = x^2$ dan R bilangan real. Maka ;
- Daerah asal f adalah bilangan real R
- Daerah kawan f adalah bilangan real R
- Daerah hasil f adalah $\{y : y \geq 0\}$
- Bayangan dari -3 adalah 9, maka dapat ditulis $f(-3) = 9$ atau $f : -3 \rightarrow 9$

Jenis-jenis Fungsi

- Fungsi injektif / fungsi satu-satu
- Fungsi surjektif / fungsi onto / fungsi pada
- Fungsi Konstan
- Fungsi Satuan
- Fungsi Nilai Mutlak
- Fungsi Tangga
- Fungsi Sama
- Fungsi Komposisi
- Fungsi invers
- Fungsi Karakteristik

Fungsi injektif / fungsi satu-satu

- Misalkan $f : A \rightarrow B$.

  f disebut fungsi injektif jika untuk setiap $a, b \in A$ dan $f(a) = f(b)$ maka $a = b$, atau jika $a \neq b$, maka $f(a) \neq f(b)$.

  Contoh ;
- $f : R \rightarrow R$, dengan $f(x) = x^2$ bukan fungsi injektif, sebab $f(-3)=f(3)=9$, tetapi $-3 \neq 3$.
- $f : R \rightarrow R$, dengan $f(x) = x^3$ merupakan fungsi injektif, sebab untuk setiap $a, b \in R$ dan $a \neq b$, maka $a^3 \neq b^3$.

Fungsi surjektif / fungsi onto / fungsi pada

- Misalkan $f : A \rightarrow B$.

  f disebut fungsi surjektif jika untuk setiap $b \in B$ ada $a \in A$, sehingga $f(a) = b$.

  Dengan kata lain

  f disebut fungsi surjektif jika $f(A) = B$, dengan $f(A)$ adalah range dari fungsi f.

Contoh Fungsi Surjektif

Misalkan $A = \{x : -1 \leq x \leq 1, x \in R\}$

- $f : A \to A$, dengan $f(x) = x^2$, maka f bukan fungsi surjektif, sebab ada anggota A di kodomain yang tidak mempunyai kawan di domain A, yaitu $\{x : -1 \leq x < 0, x \in R\}$.
- $g : A \to A$, dengan $g(x) = x^3$, maka g merupakan fungsi surjektif, sebab setiap anggota A di kodomain mempunyai kawan di domain A, atau setiap $y \in A$ (kodomain) ada $x = y^{1/3} \in A$ (domain), sehingga $g(x) = g(y^{1/3}) = (y^{1/3})^3 = y$.

Fungsi Konstan

- Misalkan $f : A \rightarrow B$.

  f disebut fungsi konstan jika setiap anggota A dipetakan ke satu titik anggota B.

  Contoh ;

- $f : R \rightarrow R$, dengan $f(x) = 3$, maka f merupakan fungsi konstan, sebab setiap $x \in R$ (domain) dipetakan ke satu titik kodomain, yaitu 3.

Fungsi Satuan

- Misalkan $f : A \to A$.

  f disebut fungsi satuan atau fungsi identitas jika f memetakan himpunan A ke dirinya sendiri, yaitu $f(x) = x$.

  Contoh ;

- $f : R \to R$, dengan $f(x) = x$. Maka f merupakan fungsi satuan.

Fungsi Nilai Mutlak

- Misalkan $f : A \rightarrow B$.

  f disebut fungsi mutlak jika f memetakan setiap $x \in A$ ke nilai mutlaknya.

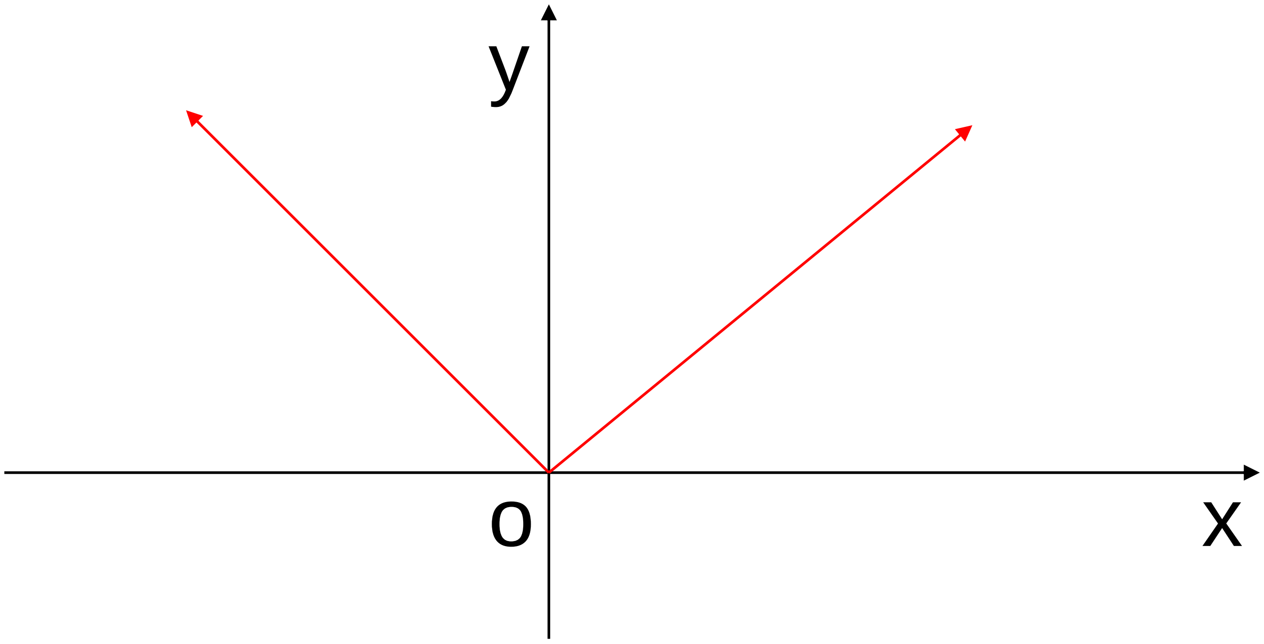
  Contoh ;

- $f(x) = |x|$, $x \in R$ atau dapat ditulis

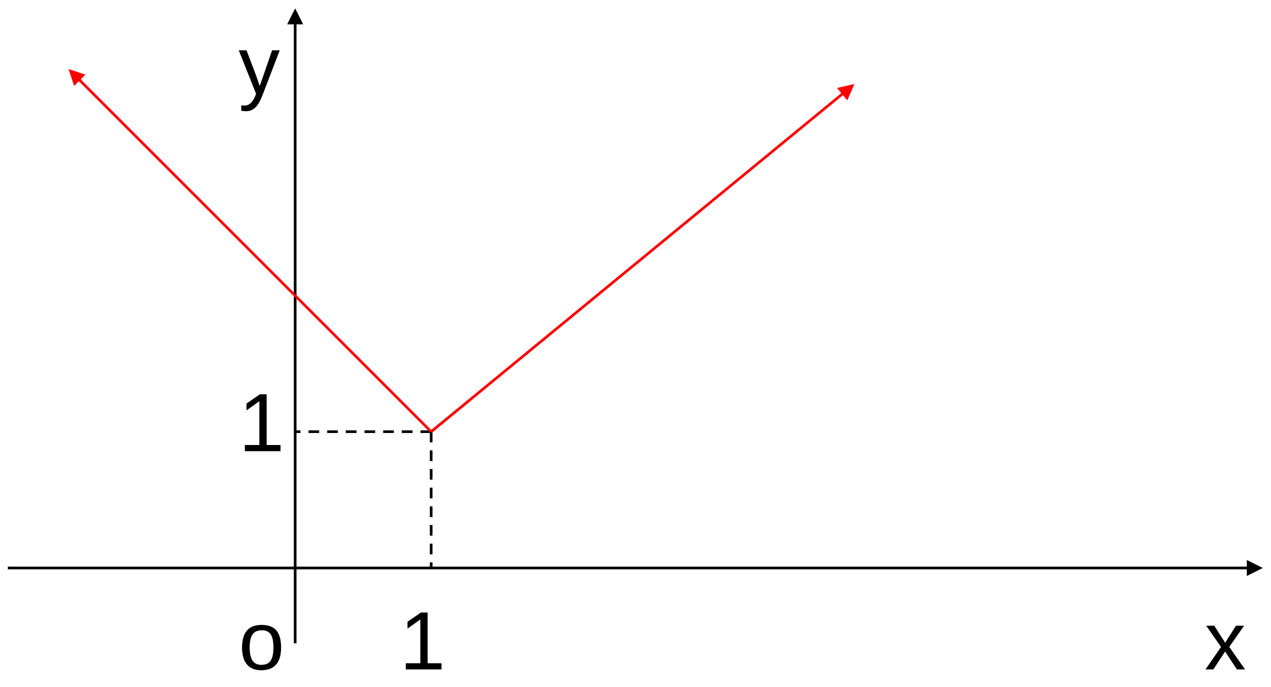
  $f(x) = |x| = x$, jika $x \geq 0$

  $= -x$, jika $x < 0$

Grafik $f(x) = |x|, x \in R$



Grafik $f(x) = |x-1|+1,\ x \in R$



Fungsi Tangga

- Fungsi tangga f didefinisikan oleh ;
  $f(x) = ||x|| =$ bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

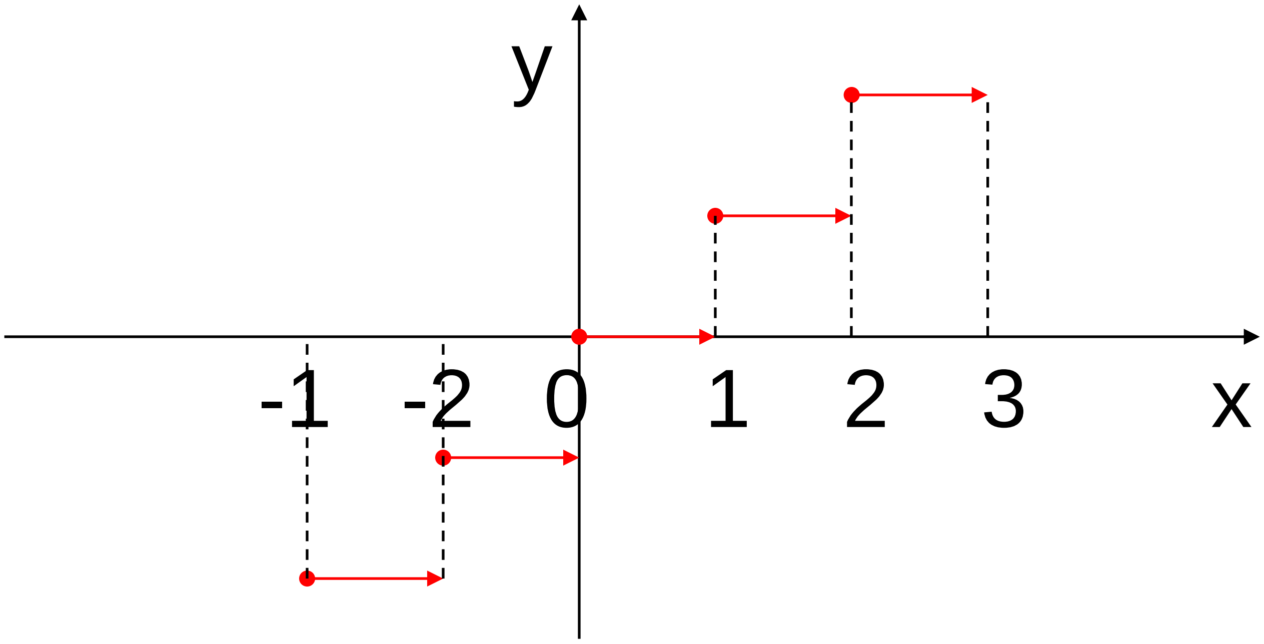
  Jika $-1 \leq x < 0$, maka $f(x) = -1$

  Jika $0 \leq x < 1$, maka $f(x) = 0$

  Jika $1 \leq x < 2$, maka $f(x) = 1$

  dan seterusnya.

Grafik fungsi tangga f(x) = ||x||



Bagaimana Grafiknya jika $f(x) = \|x-1\|$

Silahkan dicoba.

$f(x) = \|x-1\|$ = bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x-1.

Jika $-1 \leq (x-1) < 0$, maka $f(x) = -1$

Jika $0 \leq (x-1) < 1$, maka $f(x) = 0$

Jika $1 \leq (x-1) < 2$, maka $f(x) = 1$

dan seterusnya.

Jadi Jika $0 \leq x < 1$, maka $f(x) = -1$

Jika $1 \leq x < 2$, maka $f(x) = 0$

Jika $2 \leq x < 3$, maka $f(x) = 1$

dan seterusnya.

Bagaimana grafiknya ?

Fungsi Sama

Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : A \rightarrow B$.

Fungsi f dikatakan sama dengan fungsi g jika $f(a)=g(a)$, untuk setiap $a \in A$.

Contoh ;

$f(x) = x^2$ dan $g(y) = y^2$, maka fungsi f sama dengan fungsi g, dan ditulis $f = g$.

Fungsi Komposisi

- Jika $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$, maka kita mendapatkan fungsi baru dari A ke C yang disebut dengan fungsi komposisi dari f dan g, dan ditulis dengan notasi ; $g\ f$.
- Misalkan fungsi baru tersebut adalah h, maka ditulis $h = g\ f$.

Contoh Fungsi Komposisi

- Misalkan $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x-1$, maka

  $(g\ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1$, dan

  $(f\ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2$.
- Dari contoh di atas terlihat bahwa $f\ g \neq g\ f$, dan secara umum fungsi komposisi tidak bersifat komutatif.

Fungsi invers

- Misalkan $f : A \rightarrow B$

  f dikatakan mempunyai invers dari B ke A jika f merupakan fungsi satu-satu dan onto. Ditulis dengan notasi $f^{-1} : B \rightarrow A$.

  atau

  f dikatakan mempunyai invers dari f(A) ke A jika f merupakan fungsi satu-satu.

  Ditulis dengan notasi $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$.

Contoh fungsi invers

- Jika $f : R \rightarrow R$ dengan $f(x) = x^2$, apakah f mempunyai invers ? Kalau ada tentukan inversnya !

  Ternyata f tidak mempunyai invers, sebab f bukan fungsi satu-satu.
- Jika $f : R \rightarrow R$ dengan $f(x) = x-1$, apakah f mempunyai invers ? Kalau ada tentukan inversnya !

  Ternyata f mempunyai invers, sebab f fungsi satu-satu dan onto, dan $f^{-1}(x) = x + 1$.

Fungsi Karakteristik

- Misalkan A sebarang himpunan bagian dari himpunan semesta S.

  Didefinisikan fungsi $X_A : S \rightarrow \{1, 0\}$, dengan $X_A(x) = 1$ jika $x \in A$ dan

  $$X_A(x) = 0 \text{ jika } x \notin A$$

  Maka X_A disebut fungsi karakteristik dari A.

Contoh fungsi karakteristik

- Misalkan S = {a, b, c, d, e}, A = {a, b, e}, B = {c, d} dan C = {a, d, e}, maka ;

  X_A = {(a,1), (b,1), (c,0), (d,0), (e,1)}

  X_B = {(a,0), (b,0), (c,1), (d,1), (e,0)}

  X_C = {(a,1), (b,0), (c,0), (d,1), (e,1)}

Pembatasan dan Perluasan Fungsi

- Misalkan $f : A \to C$ dan $B \subset A$.

  Dari fungsi f dapat dibentuk fungsi $f' : B \to C$ yang didefinisikan dengan $f'(b) = f(b)$, untuk setiap $b \in B$.

  Fungsi f' disebut pembatasan/retriksi fungsi f terhadap B, dan ditulis dengan notasi : $f' = f|_B$.

Contoh fungsi retriksi

- Misalkan $f : R \to R$ dengan $f(x) = x - 1$.

  Jika P = {bilangan prima}, maka retriksi fungsi f terhadap P adalah :

  $f' = f|_P = \{(2,1), (3,2), (5,4), (7,6), \ldots\}$
- Sedangkan jika A = {bilangan asli}, maka retriksi fungsi f terhadap A adalah :

  $f' = f|_A = \{(1,0), (2,1), (3,2), (4,3), \ldots\}$

Perluasan fungsi f

- Misalkan $f : A \to C$ dan $A \subset D$.

  Dari fungsi f dapat dibentuk fungsi $F : D \to C$ yang didefinisikan dengan $F(a) = f(a)$, untuk setiap $a \in A$.

  Fungsi F disebut perluasan/ektensi fungsi f terhadap D, dan ditulis dengan notasi : $F = f|_D$.

Contoh perluasan fungsi

- Misalkan $f(x) = x$ dengan $x \geq 0$, maka $F(x) = x$ dengan $x \geq -2$ merupakan perluasan fungsi f, sedangkan $g(x) = x$ dengan $-1 \leq x \leq 1$ bukan merupakan perluasan fungsi f.

Operasi yang Merupakan Fungsi

- Sebuah operasi pada suatu himpunan A merupakan sebuah fungsi dari produk kartesius A x A, dan ditulis dengan notasi ;

$$\alpha : A \times A \rightarrow A$$

Jika $\alpha(a,b)$ dinyatakan dengan operasi Δ, maka $\alpha(a,b)$ dapat ditulis dengan notasi ;

$$\alpha(a,b) = a \, \Delta \, b$$

Sifat-sifat operasi yang merupakan fungsi

- Komutatif
- Assosiatif
- Distributif
- Unsur identitas
- Unsur Invers

Sifat komutatif

- Sebuah operasi $\alpha : A \times A \rightarrow A$ disebut komutatif, jika $\alpha(a,b) = \alpha(b,a)$, untuk setiap $a, b \in A$.
- Jika $\alpha(a,b) = a \Delta b$, maka diperoleh :

  $a \Delta b = b \Delta a$, untuk setiap $a, b \in A$.

Sifat Assosiatif

- Sebuah operasi $\alpha : A \times A \to A$ disebut assosiatif, jika $\alpha(\alpha(a,b),c) = \alpha(a,\alpha(b,c))$, untuk setiap $a, b, c \in A$.

  atau

  $(a \Delta b) \Delta c = a \Delta (b \Delta c)$, untuk setiap $a, b, c \in A$.

Sifat Distributif

- Sebuah operasi $\alpha : A \times A \rightarrow A$ disebut distributif terhadap $\beta : A \times A \rightarrow A$, jika $\alpha(a, \beta(b,c)) = \beta(\alpha(a,b),\alpha(a,c))$, untuk setiap $a, b, c \in A$.
- Jika $\alpha(a,b) = a \,\Delta\, b$ dan $\beta(a,b) = a \quad b$, maka diperoleh ;

$$a \,\Delta\, (b \quad c) = (a \,\Delta\, b) \quad (a \,\Delta\, c)$$

Unsur Identitas

- Misalkan $\alpha : A \times A \rightarrow A$ dengan $\alpha(a,b) = a \Delta b$, untuk setiap $a, b \in A$.

  Sebuah unsur x disebut unsur identitas jika untuk setiap $a \in A$ berlaku :

$$\alpha(a,x) = \alpha(x,a) = a$$

atau

$$a \Delta x = x \Delta a = a$$

Unsur Invers

- Misalkan $\alpha : A \times A \rightarrow A$ dengan $\alpha(a,b) = a \Delta b$, untuk setiap $a, b \in A$ dan $x \in A$ sebuah unsur identitas pada A.

  Invers dari a adalah $a^{-1} \in A$ jika berlaku :

$$\alpha(a^{-1},a) = \alpha(a,a^{-1}) = x$$

atau

$$a^{-1} \Delta a = a \Delta a^{-1} = x$$

Contoh

- Operasi penjumlahan pada himpunan bilangan real bersifat komutatif dan asosiatif, sebab untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku ;

  $a + b = b + a$ dan $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Operasi pengurangan pada himpunan bilangan real tidak bersifat komutatif, sebab untuk setiap $a,b \in R$,

  $a – b \neq b - a$

Contoh

- Misalkan α merupakan operasi pada himpunan bilangan real dengan
  $\alpha : (a,b) \rightarrow a + 2b$

  Operasi tersebut tidak bersifat komutatif, sebab ;

  $\alpha(a,b) = a + 2b$,

  $\alpha(b,a) = b + 2a$,

  dan $a + 2b \neq b + 2a$ atau $\alpha(a,b) \neq \alpha(b,a)$.

Contoh

- Misalkan α adalah operasi yang didefinisikan dengan $\alpha(a,b) = a\Delta b = a+b-a^2b^2$.

  Operasi tersebut bersifat komutatif, sebab ;

  $\alpha(a,b) = a\Delta b = a+b-a^2b^2$,

  $\alpha(b,a) = b\Delta a = b+a-b^2a^2$,

  dan $a+b-a^2b^2 = b+a-b^2a^2$ atau $\alpha(a,b) = \alpha(b,a)$.

Contoh

- Misalkan $\alpha : A \times A \rightarrow A$ adalah operasi dengan definisi $\alpha(a,b) = a*b = a+b-ab$.

  Carilah unsur identitasnya dan carilah invers dari $a \in A$ bila ada !

Jawab

Misalkan unsur identitasnya adalah x, maka $a*x = x*a = a$.

berarti $x*a = x+a-xa = a$

maka $x(1-a) = 0$ atau $x = 0$.

Jadi unsur identitasnya adalah 0.

Akan dicari invers dari $a \in A$

Di atas sudah diketahui bahwa unsur identitasnya adalah 0.

Misalkan unsur invers dari a adalah y, maka ;

$y*a = y+a-ya = 0$

$y(1-a) = -a$ atau $y = a/(a-1)$, $a \neq 1$.

Jadi invers dari $a \in A$ adalah $a/(a-1) \in A$ dengan $a \neq 1$.

Soal latihan

Misalkan α, β adalah operasi-operasi pada himpunan bilangan bulat yang didefinisikan dengan :

$\alpha(a,b) = a\Delta b = ab$

$\beta(a,b) = a \;\; b = a^b$, $a \neq 0$

- Selidiki apakah α dan β tertutup pada himpunan bilangan bulat.
- Carilah unsur identitas operasi α dan β di atas.
- Carilah unsur invers untuk setiap x bilangan bulat (jika ada) dibawah operasi tersebut.