Logika Matematika

1. Pengertian Logika
2. Pernyataan Matematika
3. Nilai Kebenaran
4. Operasi Uner
5. Operasi Biner
6. Tabel kebenaran Pernyataan
7. Tautologi, Kontradiksi dan Kontingen
8. Pernyataan-pernyataan Equivalen
9. Konvers, Invers dan Kontrapositif
10. Penarikan Kesimpulan

Cece Kustiawan, FPMIPA, UPI

Pengertian Logika

- Didalam *logika*, kita akan mengenal istilah *penalaran*, yang diartikan sebagai penarikan kesimpulan dalam sebuah argumen.
- Penalaran, sering pula diartikan cara berfikir, merupakan penjelasan untuk memperlihatkan hubungan antara dua hal atau lebih berdasarkan sifat-sifat atau hukum-hukum tertentu yang sudah diakui kebenarannya dengan langkah-langkah tertentu yang berakhir dengan sebuah kesimpulan.
- Dalam arti luas logika adalah sebuah metode dan prinsip-prinsip yang dapat memisahkan secara tegas antara penalaran yang benar dengan penalaran yang salah.

Pernyataan Matematika

- Pengertian Pernyataan

  Pernyataan harus dibedakan dari kalimat biasa. Tidak semua kalimat termasuk pernyataan.

  Pernyataan diartikan sebagai kalimat matematika tertutup yang benar atau salah, tapi tidak kedua-duanya dalam saat yang sama.

  Pernyataan biasanya dinyatakan dengan huruf kecil, misalnya : p, q, r …

Contoh Pernyataan

p : Kambing adalah hewan berkaki empat

q : $6 \times 11 = 60$

r : Himpunan kosong adalah himpunan bagian dari setiap himpunan.

Kalimat tersebut di atas merupakan pernyataan, sebab dapat ditentukan nilai kebenaran dari kalimat-kalimat tersebut.

Contoh Bukan Pernyataan

- Apakah dia pandai ?
- Salinlah bacaan ini !
- $3x - 4 = 5x + 14$

Kalimat tersebut di atas bukan merupakan pernyataan, sebab tidak dapat ditentukan nilai kebenaran dari kalimat-kalimat tersebut.

Nilai Kebenaran

- Kebenaran atau kesalahan sebuah pernyataan dinamakan “ Nilai Kebenaran” dari pernyataan tersebut.
- Nilai kebenaran pernyataan p diberi lambang τ (p).

  Jika benar, maka nilai kebenarannya B, jika salah maka nilai kebenarannya S.

Contoh

- p : Kambing adalah hewan berkaki empat, maka τ (p) = B
- q : 6 x 11 = 60, maka τ (q) = S
- r : Himpunan kosong adalah himpunan bagian dari setiap himpunan, maka τ (r) = B

  Catatan :

  Kalimat “x - 2 = 10” bukan contoh pernyataan, sebab kalimat tersebut benar jika x = 12 dan salah untuk x yang lainnya.

  Kalimat perintah atau larangan bukanlah pernyataan (dalam arti Matematika), sebab tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.

Operasi Uner

- Operasi uner adalah operasi yang hanya berkenaan dengan satu unsur, yaitu pernyataanlah sebagai unsurnya.
- Dalam logika matematika terdapat operasi uner (monar) yaitu operasi negasi, atau disebut pula operasi penyangkalan/ ingkaran.
- Nilai kebenaran negasi sebuah pernyataan adalah kebalikan dari nilai kebenaran yang dimiliki oleh pernyataan tersebut.

Contoh negasi operasi uner

- $p : 4 + 4 = 16$, maka

  $\sim p : 4 + 4 \neq 16$

  $\sim p$: Tidak benar $4 + 4 = 16$

  $\tau(p) = S$ dan $\tau(\sim p) = B$

- $q : x^2 \geq 0, x \in R$, maka

  $\sim q : x^2 < 0, x \in R$

  $\sim q$: Tidak benar bahwa $x^2 \geq 0, x \in R$

  $\tau(q) = B$ dan $\tau(\sim q) = S$

Operasi Biner

- Operasi biner adalah operasi yang berkenaan dengan dua unsur.

  Dalam matematika yang termasuk operasi biner diantaranya ; penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian.
- Dalam logika matematika, operasi biner berkenaan dengan dua pernyataan.
- Ada 4 macam operasi biner yang akan kita pelajari, yaitu :

1. Operasi Konjungsi
2. Operasi Disjungsi
3. Operasi Implikasi
4. Operasi Biimplikasi

Operasi Konjungsi

- Dua pernyataan tunggal dapat digabungkan menjadi suatu pernyataan majemuk. Salah satu cara penggabungan tersebut diantaranya dengan menggunakan kata “dan”, yang dikenal dengan operasi “konjungsi”.
- Konjungsi antara pernyataan p dan q dinyatakan dengan “$p \wedge q$”.
- Pernyataan $p \wedge q$ merupakan pernyataan yang benar jika p dan q kedua-duanya benar, dan dalam keadaan yang lain adalah salah.

Contoh operasi konjungsi

- p : Persegi termasuk poligon

  q : Jajar genjang termasuk poligon

  p Λ q : Persegi dan jajar genjang termasuk poligon, maka

  τ (p Λ q) = B, sebab τ (p) = B dan τ (q) = B.
- p : Air raksa termasuk benda gas

  q : Helium termasuk benda gas

  p Λ q : Air raksa dan helium termasuk benda gas, maka

  τ (p Λ q) = S, sebab τ (p) = S dan τ (q) = B.

Operasi Disjungsi

- Pernyataan disjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang terdiri dari dua pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan kata “atau” dan dilambangkan dengan “V”.
- Disjungsi antara pernyataan p dan q dinyatakan dengan p V q.

Operasi Disjungsi (lanjutan)

- Kata “atau” seringkali mempunyai dua arti yang berbeda.
- Pernyataan “p V q” bisa mempunyai arti p atau q tetapi tidak keduanya dan dinamakan arti eksklusif. Disjungsi demikian disebut disjungsi eksklusif.
- Dilain pihak pernyataan “p V q” bisa mempunyai arti p atau q, atau keduanya. Disjungsi demikian disebut disjungsi inklusif.

Contoh Disjungsi Eksklusif

- p : Kamera adalah alat visual

  q : Kamera adalah alat audial

  p V q : Kamera adalah alat visual atau audial.

  Pada contoh di atas, Kamera termasuk alat visual, tetapi tidak termasuk alat audial. Jadi yang benar hanyalah satu dari kedua pernyataan pembentuknya, dan tidak keduanya. Disjungsi seperti ini disebut disjungsi eksklusif.

Contoh Disjungsi Inklusif

- p : 7 merupakan bilangan prima

  q : 7 merupakan bilangan ganjil

  p V q : 7 merupakan bilangan prima atau ganjil.

  Pada contoh di atas, kedua pernyataan tersebut benar, dan disjungsi seperti ini disebut disjungsi inklusif.

Nilai kebenaran operasi disjungsi

- Pada disjungsi eksklusif nilai kebenaran pVq adalah benar, jika nilai kebenaran p dan q berbeda, dan salah jika p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama. Disjungsi seperti ini diberi lambang khusus, yakni $\underline{\vee}$.
- Nilai kebenaran p V q pada disjungsi inklusif adalah benar jika salah satu dari p dan q adalah benar, atau kedua-duanya benar, dan salah jika p dan q keduanya salah.

Operasi Implikasi

- Pernyataan implikasi atau pernyataan kondisional adalah pernyataan yang berbentuk "jika p maka q".
- Operasi implikasi dilambangkan dengan tanda ladam kuda $\supset$, atau tanda panah $\Rightarrow$
- Pernyataan "jika p maka q" ditulis dengan notasi $p \Rightarrow q$.

  Pernyataan p disebut anteseden, sedangkan q disebut konsekuen.

Contoh operasi implikasi

- p : Pak Ali adalah seorang haji

  q : Pak Ali adalah seorang muslim

  $p \Rightarrow q$: Jika Pak Ali seorang haji, maka ia seorang muslim.
- Nilai kebenaran $p \Rightarrow q$ adalah salah, jika pernyataan p benar dan pernyataan q salah, dan benar dalam keadaan yang lainnya.

Operasi Biimplikasi

- Pernyataan biimplikasi adalah pernyataan yang berbentuk “jika dan hanya jika”, yang disingkat dengan “jhj” dan ditulis dengan lambang “$\Leftrightarrow$”.

  Pernyataan “p jhj q” ditulis dengan notasi “$p \Leftrightarrow q$”.
- Nilai kebenaran $p \Leftrightarrow q$ adalah benar jika nilai kebenaran p dan q sama, dan salah jika nilai kebenaran p dan q tidak sama.

Contoh biimplikasi

- Perhatikan pernyataan berikut ;

  (a) $x^2 \geq 0$ jhj $2^0 = 1$

  (b) $x^2 \geq 0$ jhj $2^0 = 0$

  (c) $x^2 < 0$ jhj $2^0 = 1$

  (d) $x^2 < 0$ jhj $2^0 = 0$

  Pernyataan (a) dan (d) merupakan pernyataan yang benar, sebab kedua pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang sama.

  Sedangkan pernyataan (c) dan (d) merupakan pernyataan yang salah, sebab kedua pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang berbeda.

Tabel Kebenaran Pernyataan

- Tabel kebenaran adalah suatu tabel yang memuat nilai kebenaran pernyataan-pernyataan majemuk.
- Untuk melengkapi tabel kebenaran, kita harus mengetahui dulu berapa banyak pernyataan yang termuat dalam tabel itu, sehingga tidak ada komposisi yang terlewatkan.

- Sebagai contoh, jika kita mempunyai 2 pernyataan, maka komposisi yang mungkin adalah ;

p	q
B	B
B	S
S	B
S	S

Tabel kebenaran dari operasi konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi

Konjungsi

p	q	p Λ q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Disjungsi Inklusif

p	q	p V q
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Biimplikasi

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

- Jika pernyataan majemuk memuat n pernyataan tunggal, maka jumlah komposisi nilai kebenarannya adalah 2^n.

  Jadi, tabel dari 3 pernyataan memuat 8 komposisi, tabel dari 4 pernyataan memuat 16 komposisi, dst.

- Untuk membuat tabel kebenaran majemuk yang memuat n pernyataan tunggal, dilakukan langkah berikut ;

  Kolom-1, isikan huruf B mulai dari baris pertama sebanyak 2^{n-1}, dilanjutkan huruf S sebanyak 2^{n-1}.

  Kolom-2, isikan huruf B sebanyak 2^{n-2}, dilanjutkan huruf S sebanyak 2^{n-2}, kemudian huruf B lagi sebanyak 2^{n-2}, dilanjutkan huruf S sebanyak 2^{n-2}, silih berganti sampai baris terakhir.

  Kolom-3, isikan huruf B sebanyak 2^{n-3}, dilanjutkan huruf S sebanyak 2^{n-3}, kemudian huruf B lagi sebanyak 2^{n-3}, dilanjutkan huruf S sebanyak 2^{n-3}, silih berganti sampai baris terakhir. Dan seterusnya.

Contoh komposisi untuk 3 pernyataan

p	q	r
B	B	B
B	B	S
B	S	B
B	S	S
S	B	B
S	B	S
S	S	B
S	S	S

Tautologi, Kontradiksi dan Kontingen

- Dalam tabel kebenaran dari suatu pernyataan majemuk, kita melihat adanya nilai B dan S yang terkombinasi dalam suatu kolom tertentu.
- Pernyataan yang semua nilai kebenarannya B disebut Tautologi.
- Pernyataan yang semua nilai kebenarannya S disebut Kontradiksi.
- Pernyataan yang semua nilai kebenarannya memuat B dan S disebut Kontingen.

Contoh Tautologi dan Kontradiksi

Tautologi

p	~p	P V ~p
B	S	B
S	B	B

Kontradiksi

p	~p	P Λ ~p
B	S	S
S	B	S

Pernyataan-pernyataan Equivalen

- Dua pernyataan disebut equivalen jika nilai kebenaran kedua pernyataan tersebut sama, dan dihubungkan dengan lambang "≡".
- Jadi $p \equiv q$ jhj $\tau(p) = \tau(q)$.

Contoh; Pernyataan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ equivalen dengan $p \Leftrightarrow q$

p	q	$(p \Rightarrow q$	$\wedge$	$q \Rightarrow p)$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	S
S	S	B	B	B

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Konvers, Invers dan Kontrapositif

- Perhatikan contoh kondisional berikut ;

  “Jika Pak Ali seorang haji, maka ia seorang muslim”
- Konvers dari pernyataan tersebut adalah ;

  “Jika Pak Ali seorang muslim, maka ia seorang haji”
- Invers dari pernyataan tersebut adalah ;

  “Jika Pak Ali bukan seorang haji, maka ia bukan seorang muslim”
- Kontrapositif dari pernyataan tersebut adalah ;

  “Jika Pak Ali bukan seorang muslim, maka ia bukan seorang haji”

Tabel kebenaran dari Konvers, Invers dan Kontrapositif

				Kondisional	Konvers	Invers	Kontra positif
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

- Dari tabel di atas terlihat bahwa nilai kebenaran kondisional sama dengan kontrapositifnya, dan nilai kebenaran invers sama dengan konversnya.
- Jadi $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ dan

  $(q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$

Beberapa pernyataan majemuk yang saling equivalen

1. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
2. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
3. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
4. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5. $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
6. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

   $\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

Penarikan Kesimpulan

- Dalam logika matematika ada beberapa penarikan kesimpulan yang sah, diantaranya adalah ;

1. Penarikan kesimpulan Modus Ponen
2. Penarikan kesimpulan Modus Tollens
3. Penarikan kesimpulan Silogisme

Penarikan kesimpulan Modus Ponen

Pernyataan 1 : $p \Rightarrow q$ benar

<u>Pernyataan 2 : p benar</u>

Kesimpulan : q benar

Penarikan kesimpulan Modus Tollens

Pernyataan 1 : $p \Rightarrow q$ benar

Pernyataan 2 : $\sim q$ benar

Kesimpulan : $\sim p$ benar

Penarikan kesimpulan Silogisme

Pernyataan 1 : p $\Rightarrow$ q benar

<u>Pernyataan 2 : q $\Rightarrow$ r benar</u>

Kesimpulan : p $\Rightarrow$ r benar

Contoh

Jika hari hujan maka halaman basah

Halaman tidak basah

Kesimpulan : hari tidak hujan

(Penarikan kesimpulan di atas adalah Modus Tollens)

Soal-soal

1. Jika pernyataan p dan q benar, maka pernyataan yang benar adalah :

   (1) $p \Leftrightarrow q$

   (2) $p \wedge q$

   (3) $\sim p \Rightarrow q$

   (4) $p \vee \sim q$

2. Jika pernyataan p benar dan q salah, maka pernyataan berikut yang bernilai benar adalah :

(1) $\sim p \Leftrightarrow q$

(2) $\sim p \vee \sim q$

(3) $q \vee p$

(4) $\sim q \wedge p$

3. Pernyataan berikut yang equivalen dengan “Jika p benar maka q salah” adalah :

   A. p benar atau q salah
   B. Jika q salah maka p benar
   C. Jika p salah maka q benar
   D. Jika q benar maka p salah
   E. Jika q benar maka p benar

END

SELAMAT BELAJAR