RELASI

1. Pasangan Berurutan
2. Fungsi Proposisi dan Kalimat Terbuka
3. Himpunan Jawaban dan Grafik Relasi
4. Jenis-jenis Relasi
5. Domain dan Range suatu Relasi

Pasangan Berurutan (cartesian Product)

Himpunan semua pasangan berurutan (a,b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$ disebut himpunan perkalian A dan B atau produk kartesius A dan B ditulis dengan notasi A x B dan didefinisikan sbb ;

$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

Contoh

Jika A = {1, 2, 3} dan B = {a, b}, maka

A x B = {(1,a), (2,a), (3,a), (1,b), (2,b), (3,b)}   dan

B x A = {(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)}

Fungsi Proposisi dan kalimat Terbuka

- Fungsi proposisi yang didefinisikan pada produk kartesius A x B dari dua himpunan A dan B adalah sebuah ungkapan yang dinyatakan dengan P(x,y).
- P(x,y) merupakan variabel yang dapat disubstitusi oleh $a \in A$ dan $b \in B$, sehingga terdapat pasangan terurut $(a,b) \in (A x B)$ yang memenuhi ungkapan P(x,y).

Contoh Fungsi Proposisi

- Misalkan A = {1, 2, 3} dan B = {2, 3, 4}

  Maka P(x,y) = "x kurang dari y" merupakan suatu fungsi proposisi pada A x B.

  Dari contoh di atas, maka

  P(1,2) merupakan pernyataan yang benar, sebab 1 kurang dari 2.

  Sedangkan P(3,2) merupakan pernyataan yang salah, sebab 3 tidak kurang dari 2.

Kalimat Terbuka

- Ungkapan P(x,y) belum dapat ditentukan nilai kebenarannya, apakah benar atau salah. Ungkapan seperti itu disebut kalimat terbuka.
- Contoh

  $x + y = 9$

  x habis dibagi oleh y

  $x < y$

Relasi R dari himpunan A ke himpunan B meliputi;

1. Himpunan A
2. Himpunan B
3. Kalimat terbuka P(x,y) sehingga P(a,b) benar atau salah untuk setiap pasangan terurut $(a,b) \in A \times B$.

Relasi yang menghubungkan himpunan A ke himpunan B biasa ditulis

$$R = (A,B,P(x,y)).$$

Jika P(a,b) benar, maka dikatakan a berelasi dengan b dan ditulis $a\ R\ b$.

Jika P(a,b) salah, maka dikatakan a tidak berelasi dengan b dan ditulis $a \not R\ b$.

Contoh Relasi

Misalkan A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4} dan

P(x,y) = “x kurang dari y”, maka R = (A,B,P(x,y)) merupakan sebuah relasi.

Dari contoh di atas, maka 1 R 2, 1 R 3, sedangkan $2 \not R\ 2$ dan $3 \not R\ 2$.

Jika R = (A,B,P(x,y)) merupakan sebuah relasi, maka dikatakan bahwa kalimat terbuka P(x,y) mendefinisikan suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B.

Himpunan Jawaban dan Grafik Relasi

- Misalkan R = (A,B,P(x,y)) merupakan suatu relasi. Himpunan jawab R* dari relasi R adalah titik-titik $(a,b)\in A\times B$ sehingga P(a,b) benar. Ditulis dalam notasi himpunan ;

  $R^* = \{(a,b) : a\in A,\ b\in B,\ P(a,b) \text{ benar}\}$

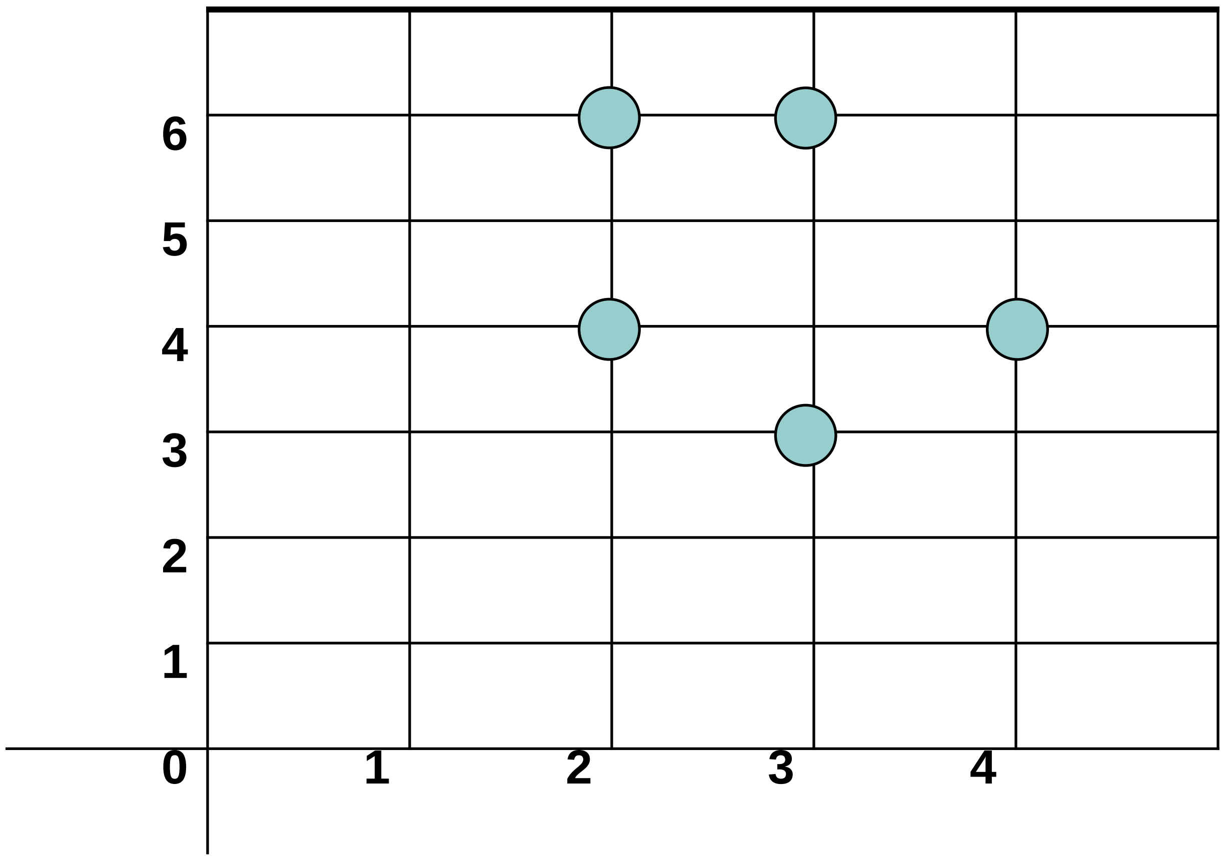
Contoh

- Misalkan R = (A,B,P(x,y)) dengan A={2, 3, 4} dan B = {3, 4, 5, 6} dan P(x,y) berbunyi “y habis dibagi oleh x”.

  Himpunan jawab dari R adalah ;

  R* = {(2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)}

R* dapat diperlihatkan pada diargam koordinat AxB sbb ;



Jenis-jenis Relasi

- Relasi Invers
- Relasi Refleksif
- Relasi Simetrik
- Relasi anti Simetrik
- Relasi Transitif
- Relasi Equivalen

Relasi Invers

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari R yang dinyatakan dengan R^{-1} adalah relasi dari B ke A yang mengandung semua pasangan terurut yang bila dipertukarkan masih termasuk dalam R. Ditulis dalam notasi himpunan sbb ;

  $R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$

Contoh Relasi Invers

Misalkan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{a, b\}$, maka

$R = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$ merupakan suatu relasi dari A ke B.

Tentukan relasi invers dari R !

Relasi invers dari R adalah ;

$R^{-1} = \{(a,1), (b,1), (a,2), (b,2)\}$

Relasi Refleksif

Misalkan R = (A, A, P(x,y)) suatu relasi.

R disebut relasi refleksif, jika setiap $a \in A$ berlaku $(a,a) \in R$.

Dengan kata lain, R disebut relasi refleksif jika setiap anggota dalam A berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh Relasi Refleksif

Diketahui A = {1, 2, 3, 4} dan

R = {(1,1), (2,3), (3,3), (4,2), (4,4)}

Apakah R relasi refleksif ?

R bukan relasi refleksif, sebab (2,2) tidak termasuk dalam R.

Jika (2,2) termasuk dalam R, yaitu
R_1 = {(1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (4,2), (4,4)}
maka R_1 merupakan relasi refleksif.

Relasi Simetrik

Misalkan R = (A, B, P(x,y)) suatu relasi.

R disebut relasi simetrik, jika setiap $(a,b) \in R$ berlaku $(b,a) \in R$.

Dengan kata lain, R disebut relasi simetrik jika a R b berakibat b R a.

Contoh Relasi Simetrik

Misalkan A = {1, 2, 3} dan

R = {(1,3), (2,3), (2,4), (3,1), (4,2)}

Apakah R relasi simetrik ?

R bukan merupakan relasi simetrik, sebab (2,3)$\in$R tetapi (3,2)$\notin$R.

Jika (3,2) termasuk dalam R, maka

R_1 = {(1,3), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,2)} merupakan relasi simetrik.

Note : R disebut relasi simetrik jika dan hanya jika R = R^{-1}.

Relasi Anti Simetrik

- Suatu relasi R disebut relasi anti simetrik jika $(a,b) \in R$ dan $(b,a) \in R$ maka $a=b$.

  Dengan kata lain ;
- Jika $a, b \in A$, $a \neq b$, maka $(a,b) \in R$ atau $(b,a) \in R$, tetapi tidak kedua-duanya.

Contoh Relasi Anti Simetrik

- Misalkan R suatu relasi dalam himpunan bilangan asli yang didefinisikan “y habis dibagi oleh x”, maka R termasuk relasi anti simetrik karena jika b habis dibagi a dan a habis dibagi b, maka a = b.
- Misalkan A = {1, 2, 3} dan R_1 = {(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)}, maka R_1 bukan relasi anti simetrik, sebab $(2,3) \in R_1$ dan $(3,2) \in R_1$ pula.

Relasi Transitif

- Misalkan R suatu relasi dalam himpunan A. R disebut relasi transitif jika berlaku ; Jika $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$ maka $(a,c) \in R$.

  Dengan kata lain
- Jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c, maka a berelasi dengan c.

Contoh Relasi Transitif

- Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $R = \{(a,b), (a,c), (b,a), (c,b)\}$, maka R bukan relasi transitif, sebab $(b,a) \in R$ dan $(a,c) \in R$ tetapi $(b,c) \notin R$.

  Coba dilengkapi agar R menjadi relasi transitif
- $R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$

Relasi Equivalen

- Suatu relasi R dalam himpunan A disebut relasi equivalen jika memenuhi ;

1) Sifat Refleksif
2) Sifat Simetrik
3) Sifat Transitif

Contoh Relasi Equivalen

- Misalkan R suatu relasi dalam segitiga yang didefinisikan “x sama dan sebangun dengan y”, maka R termasuk relasi equivalen sebab ;

1) Untuk setiap a pada himpunan tersebut, segitiga a sama dan sebangun dengan segitiga a sendiri.
2) Jika a sama dan sebangun dengan b, maka b sama dan sebangun dengan a.
3) Jika a sama dan sebangun dengan b dan b sama dan sebangun dengan c, maka a sama dan sebangun dengan c.

Domain dan Range suatu Relasi

- Misalkan R suatu relasi dari A ke B dengan $R \subset AxB$.

  Domain/ daerah asal/ daerah definisi/ ranah dari relasi R adalah sebuah himpunan D yang anggotanya merupakan anggota pertama dalam pasangan terurut R, yaitu; $D = \{a : a \in A, (a,b) \in R\}$

Range

- Range/ daerah hasil/ daerah nilai/ jangkauan adalah semua anggota himpunan bagian dari B yang merupakan anggota kedua dari pasangan terurut R, yaitu ;

  $E = \{b : b \in B, (a,b) \in R\}$

Contoh Domain dan Range

- Misalkan R relasi dalam bilangan asli A yang dinyatakan dalam kalimat terbuka "$2x + y = 10$" atau dapat ditulis ;

  $R=\{(x,y) : x \in A, y \in A, 2x + y = 10\}$, maka

  Himpunan jawab dari R adalah

  $R^* = \{(1,8), (2,6), (3,4), (4,2)\}$

  Domain dari R adalah $D = \{1,2,3,4\}$

  Range dari R adalah $E = \{8,6,4,2\}$

  Invers dari R adalah $R^{-1} = \{(8,1), (6,2), (4,3), (2,4)\}$