

# MT 406 : KALKULUS VEKTOR

# Buku Sumber Utama:

- Edwin J. Purcell, dkk, “**Kalkulus**” Jilid 2, edisi 8, Bab 13, 14 dan 17
- Noeniek Soemartojo, “**Analisa Vektor**”, edisi 4

# Geometri pada Bidang Vektor

1. Kurva Bidang : Representasi Parametrik
2. Vektor pada Bidang : Pendekatan Geometrik
3. Vektor pada Bidang : Pendekatan Aljabar
4. Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Kurvilinier
5. Kelengkungan dan Percepatan

# Kurva Bidang : Representasi Parametrik

Sebuah kurva bidang ditentukan oleh pasangan persamaan parametrik

$$x = f(t), y = g(t), t \in I$$

dengan  $f$  dan  $g$  kontinu pada selang  $I$

dan  $I$  biasanya adalah selang tertutup  $[a,b]$ .

- $t$  biasa disebut **parameter** sebagai ukuran waktu.
- Ketika  $t$  berjalan dari  $a$  ke  $b$ , maka titik  $(x,y)$  akan berjalan menelusuri kurva pada bidang  $xy$ .

- Jika  $I$  merupakan selang tertutup  $[a,b]$ , maka titik  $P(x(a),y(a))$  disebut **titik ujung awal** dan  $Q(x(b),y(b))$  disebut **titik ujung akhir**.
- Jika kurva mempunyai titik ujung yang saling berimpit, maka kurva disebut **tertutup**.
- Jika untuk  $t$  yang berbeda menghasilkan titik  $(x, y)$  yang berbeda (kecuali mungkin untuk  $t = a$  dan  $t = b$ ), maka disebut kurva **sederhana**.
- Pasangan  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  bersama selang  $I$  disebut **parametrisasi** dari suatu kurva.

# Menghilangkan Parameter

- Untuk mengenali suatu kurva yang dinyatakan dengan persamaan parametrik, kadangkala dengan cara menghilangkan parameternya, yaitu dengan menyelesaikan persamaan untuk  $t$  dan mensubstitusikannya ke dalam persamaan yang lain.
- Contoh :  
Hilangkan parameter pada  $x = 4t - 2$ ,  $y = 2t : 0 \leq t \leq 3$ , tentukan kurva yang bersesuaian dan buatlah grafiknya.

## Catatan :

Pasangan persamaan parametrik yang berbeda dapat memiliki grafik yang sama.

Dengan kata lain, sebuah kurva dapat memiliki lebih dari satu parameterisasi.

- Contoh

Sketsa grafik dari setiap pasangan parametrik berikut ;

a)  $x = \sqrt{1-t^2}$ ,  $y = t$ ,  $-1 \leq t \leq 1$

b)  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

c)  $x = (1-t^2)/(1+t^2)$ ,  $y = 2t/(1+t^2)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$

# Sikloid

- Sikloid adalah suatu kurva yang dibentuk oleh sebuah titik P pada bagian terluar dari sebuah roda ketika roda tersebut berputar di sepanjang garis lurus tanpa tergelincir.

Contoh :

Tentukan persamaan parametrik untuk sebuah sikloid.

Diperoleh persamaan parametrik untuk sikloid sbb :

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$



# Diferensial/turunan dari persamaan parametrik

- Teorema A

Misalkan  $f$  dan  $g$  kontinu dan dapat didiferensialkan dengan  $f'(t) \neq 0$  pada  $\alpha < t < \beta$ .

Maka persamaan parametrik

$$x = f(t), y = g(t)$$

mendefinisikan  $y$  sebagai fungsi  $x$ , diperoleh :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

- Contoh

Tentukan  $dy/dx$  dan  $d^2y/dx^2$  dari fungsi berikut :

a)  $x = 3t^2, y = 4t^3, t \neq 0$

b)  $x = 1 - \cos t, y = 1 + \sin t, t \neq n\pi$

# Soal Latihan

1. Diketahui persamaan parametrik

$$x = 4 - s, y = \sqrt{s}, 0 \leq s \leq 4$$

a) Gambarlah grafik kurva tersebut

b) Apakah kurva tersebut tertutup ?

Apakah kurva tersebut sederhana ?

c) Tentukan persamaan kartesius dari kurva tersebut dengan menghilangkan parameternya.

2. Tentukan persamaan garis singgung terhadap kurva pada titik yang diberikan tanpa menghilangkan parameternya, kemudian sketsa grafiknya dari pasangan persamaan

$$x = t^2, y = t^3, \text{ pada } t = 2$$

3. Tentukan panjang kurva parametrik pada selang yang diberikan, jika persamaannya

$$x = 2 - t, y = 2t - 3, -3 \leq t \leq 3$$

Ingat rumus panjang kurva adalah :

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \end{aligned}$$