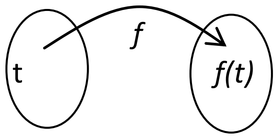
FUNGSI BERNILAI VEKTOR DAN GERAK KURVILINEAR

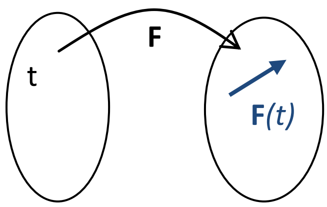
Sudah kita maklumi bahwa **fungsi bernilai real** adalah fungsi yang daerah asalnya (domain) maupun daerah hasilnya (range) bernilai real, contoh $f(t) = t^2$. Jadi $f : R \to R$.



Sekarang akan kita bahas **fungsi bernilai vektor**, yaitu fungsi yang domainnya bernilai real sedangkan rangenya bernilai vektor.

$$\mathbf{F} : t \to \mathbf{F}(t)$$

Jadi $(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} = \langle f(t), g(t) \rangle$, dengan *f* dan *g* fungsi bernilai real.



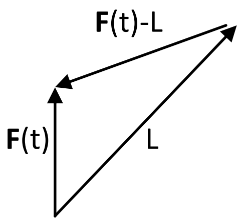
Contoh : $\mathbf{F}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} = \langle t^2, e^t \rangle$

KALKULUS UNTUK FUNGSI VEKTOR

1. Limit Fungsi Vektor

Definisi

$\lim_{t \to c} \mathbf{F}(t) = L$ artinya $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga jika $0 < |t - c| < \delta$ berlaku $|\mathbf{F}(t) - L| < \varepsilon$



Teorema A

Misalkan $\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$

F mempunyai limit di c jika dan hanya jika *f* dan *g* mempunyai limit di c.

Dalam hal ini $\lim_{t \to c} \mathbf{F}(t) = [\lim_{t \to c} f(t)]\mathbf{i} + [\lim_{t \to c} g(t)]\mathbf{j}$

Semua teorema limit standar berlaku di sini, yaitu ;

$$\lim_{t\to c}(\mathbf{F}\pm\mathbf{G})(t)=\lim_{t\to c}\mathbf{F}(t)\pm\lim_{t\to c}\mathbf{G}(t)$$

$$\lim_{t\to c}(k\mathbf{F})(t)=k\lim_{t\to c}\mathbf{F}(t),\ k \text{ scalar}$$

2. Kekontinuan Fungsi Vektor

Kekontinuan fungsi vektor mempunyai makna seperti kekontinuan pada fungsi real, yaitu ; **F** kontinu di c jhj $\lim_{t\to c}\mathbf{F}(t)=\mathbf{F}(c)$.

Dari teorema A, jelaslah bahwa ; **F** kontinu di c jhj *f* dan *g* kontinu di c.

3. Turunan Fungsi Vektor

Turunan (derivative) dari fungsi **F** didefinisikan seperti turunan pada fungsi real, yaitu ; $\mathbf{F}'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{F}(t+h)-\mathbf{F}(t)}{h}$

Atau

$$\mathbf{F}'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{[f(t+h)\mathbf{i}+g(t+h)\mathbf{j}]-[f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}]}{h}$$

$$\mathbf{F}'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{[f(t+h)-f(t)]\mathbf{i}+[g(t+h)-g(t)]\mathbf{j}}{h}$$

$$\mathbf{F}'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{[f(t+h)-f(t)]}{h}\mathbf{i}+\lim_{h\to 0}\frac{[g(t+h)-g(t)]}{h}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}'(t)=f'(t)\mathbf{i}+g'(t)\mathbf{j}=\langle f'(t),g'(t)\rangle$$

<u>Teorema B</u>

Misalkan **F** dan **G** fungsi bernilai vektor yang dapat didiferensialkan, h fungsi bernilai real yang dapat didiferensialkan, dan c suatu scalar ;

1. $D_t[\mathbf{F}(t)+\mathbf{G}(t)]=\mathbf{F}'(t)+\mathbf{G}'(t)$
2. $D_t[c\mathbf{F}(t)]=c\mathbf{F}'(t)$
3. $D_t[h(t)\mathbf{F}(t)]=h'(t)\,\mathbf{F}(t)+h(t)\,\mathbf{F}'(t)$
4. $D_t[\mathbf{F}(t).\mathbf{G}(t)]=\mathbf{F}'(t).\mathbf{G}(t)+\mathbf{F}(t).\mathbf{G}'(t)$
5. $D_t[\mathbf{F}(h(t))]=\mathbf{F}'(h(t))\,h'(t)$ (Aturan Rantai)

4. Integral Fungsi Vektor

Karena $\mathbf{F}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}$, maka

$$\int\mathbf{F}(t)dt=\left[\int f(t)dt\right]\mathbf{i}+\left[\int g(t)dt\right]\mathbf{j}$$

$$\int_a^b \mathbf{F}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j}$$

GERAK KURVILINEAR

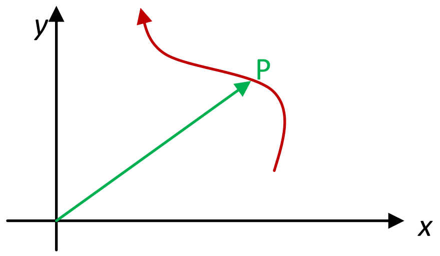
Berdasarkan fungsi bernilai vektor kita akan mempelajari gerak suatu titik pada bidang.

Jika t menyatakan waktu dan koordinat titik P yang bergerak dinyatakan oleh $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, maka vektor

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

Yang mengarah ke luar dari titik asal disebut **vektor posisi** dari titik tersebut.

Ketika t berubah menurut waktu, kepala **r**(t) akan menelusuri jalur dari titik P yang bergerak. Hasilnya adalah sebuah kurva dan gerakan seperti ini disebut gerak kurvilinear.



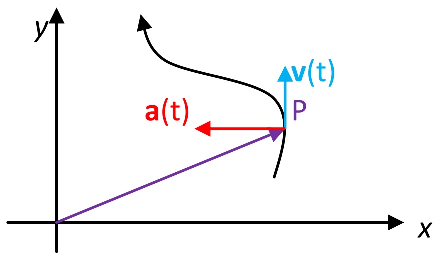
Analogi dengan gerak linear (garis lurus), kita dapat mendefinisikan kecepatan **v**(t) dan percepatan **a**(t) dari titik P yang bergerak dengan

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j}$$

Karena $(t) = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$, maka **v**(t) searah dengan garis singgung.

Besaran $|$**v**(t)$|$ disebut laju dari titik P yang bergerak.

Vektor percepatan **a**(t) mengarah ke sisi cekung kurva, yaitu ke sisi dimana kurva tersebut membelok.



Perhatikan contoh 3 dan 4 pasal 13.4

Soal latihan

Selesaikan soal-soal pada latihan 13.4 no ; 16, 17, 19, 21, 23, 24, 31, 32