KELENGKUNGAN DAN PERCEPATAN

Kita akan mempelajari kelengkungan dari suatu kurva.

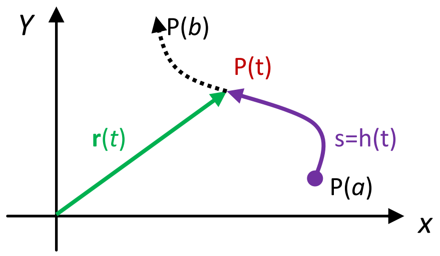
Sebuah garis lurus mempunyai kelengkungan nol, sedangkan sebuah kurva yang melengkung tajam tentu mempunyai kelengkungan yang besar.

Misalkan $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$ adalah vektor posisi untuk titik P = P(t) pada bidang.

Jika $\mathbf{r}'(t)$ ada dan kontinu dan $\mathbf{r}'(t) \neq 0, \forall\, t \in (a, b)$, maka ketika t meningkat, P akan membentuk kurva mulus dan panjang lintasan $s = h(t)$ dari P(a) ke P(t) dinyatakan dengan ;

$$s = h(t) = \int_a^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2}\, du = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du$$

Perhatikan gambar berikut ;



Laju titik yang bergerak adalah

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{v}(t)|$$

Karena $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, maka $|\mathbf{v}(t)| > 0$, sehingga s akan meningkat ketika t meningkat. Akibatnya $s = h(t)$ mempunyai invers $t = h^{-1}(s)$ dan diperoleh

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{|\mathbf{v}(t)|}$$

Misalkan $\mathbf{T}(t)$ **vektor singgung satuan** di $P(t)$ yang didefinisikan

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$$

Ketika $P(t)$ bergerak di sepanjang kurva, maka vektor satuan $\mathbf{T}(t)$ akan mengubah arahnya.

Tingkat perubahan $\mathbf{T}$ terhadap panjang busur s, yaitu $d\mathbf{T}/ds$ disebut **vektor kelengkungan** di P.

Akhirnya, **kelengkungan** κ (kappa) di titik P didefinisikan sbb ;

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$$

Berdasarkan aturan rantai,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$$

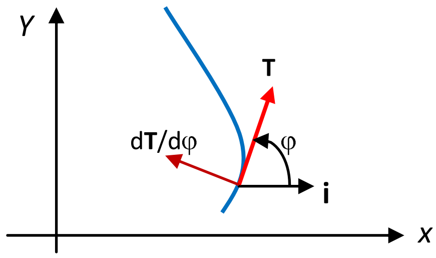
Jadi

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Perhatikan contoh 1, 2 dan 3 pasal 13.5

RUMUS LAIN UNTUK KELENGKUNGAN

Perhatikan gambar berikut ;



Misalkan φ sudut dari **i** ke **T** yang diukur berlawanan dengan arah jarum jam, maka $\mathbf{T} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}$, sehingga

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\varphi} = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}$$

$d\mathbf{T}/d\varphi$ adalah sebuah vektor satuan dengan panjang satu,

sebab $\left|\frac{d\mathbf{T}}{d\varphi}\right| = \sqrt{\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2} = 1$ dan

$\mathbf{T}.\frac{d\mathbf{T}}{d\varphi} = 0$, sebab $\mathbf{T}.\frac{d\mathbf{T}}{d\varphi} = -\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0$

Sedangkan,

$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{d\varphi}\right|\left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$, sebab $\left|\frac{d\mathbf{T}}{d\varphi}\right| = 1$

Rumus di atas mengukur tingkat perubahan φ terhadap s.

Teorema A

Misalkan sebuah kurva mempunyai persamaan vektor $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, dengan persamaan parametric x= $f(t)$ dan $y = g(t)$, maka

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$$

Jika kurva tersebut mempunyai persamaan $y = g(x)$, maka

$$\kappa = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

Buktinya lihat buku paket.

Perhatikan contoh 4 dan 5 pasal 13.5

KOMPONEN NORMAL DAN KOMPONEN SINGGUNG PADA PERCEPATAN

Misalkan P=P(t) sebuah titik pada sebuah kurva mulus.

Vektor normal satuan **N** = **N**(t) di titik P, didefinisikan sbb ;

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

maka

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

Karena

$\mathbf{T} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}$, maka $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = (-\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j})\frac{d\varphi}{ds}$ dengan **T.N** = 0

Jadi **N** adalah sebuah vektor normal satuan yang tegak lulus terhadap **T** dan mengarah ke sisi cekung kurva.

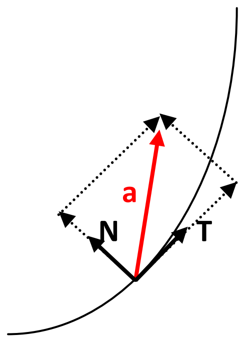
Selanjutnya, kita akan menentukan rumus dari vektor percepatan **a** yang dinyatakan dalam **T** dan **N**.

Karena $= |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = |\mathbf{v}|\,\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\,\mathbf{T}$, maka

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Jadi

$$\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\kappa\mathbf{N}$$



Perhatikan contoh 6 pasal 13.5

Kita telah menyatakan **a** dalam bentuk $= \mathbf{a_T T} + \mathbf{a_N N}$, dengan

$$\mathbf{a_T} = \frac{d^2 s}{dt^2} \ \text{ dan } \ \mathbf{a_N} = \kappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Untuk menghitung $\mathbf{a_N}$, kita harus menghitung κ, tetapi hal ini dapat dihindari dengan memperhatikan **T** dan **N** yang saling tegak lurus. Akibatnya diperoleh ;

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}_\mathbf{T}^2 + \mathbf{a}_\mathbf{N}^2$$

Perhatikan contoh 7 pasal 13.5

Soal latihan

Selesaikan soal-soal pada latihan 13.5 no ; 4, 5, 15, 16, 29, 30, 35, 36

RANGKUMAN

Misalkan $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, a ≤ t ≤ b adalah vektor posisi untuk titik P = P(t) pada bidang.

Jika $\mathbf{r}'(t)$ ada dan kontinu dan $\mathbf{r}'(t) \neq 0, \forall\, t \in (a, b)$, maka panjang lintasan $s = h(t)$ dari P(a) ke P(t) dinyatakan dengan ;

$$s = h(t) = \int_a^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2}\, du = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du$$

Laju titik yang bergerak adalah

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{v}(t)|$$

Misalkan $\mathbf{T}(t)$ **vektor singgung satuan** di $\mathrm{P}(t)$ yang didefinisikan

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$$

Tingkat perubahan $\mathbf{T}$ terhadap panjang busur s, yaitu $d\mathrm{T}/ds$ disebut **vektor kelengkungan** di P.

Akhirnya, **kelengkungan** κ (kappa) di titik P didefinisikan sbb ;

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$$

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Jari-jari lingkaran kelengkungan : $R = \frac{1}{\kappa}$

RUMUS LAIN UNTUK KELENGKUNGAN

Misalkan φ sudut dari **i** ke **T** yang diukur berlawanan dengan arah jarum jam, maka $\mathbf{T} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}$, sehingga

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\varphi} = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}$$

$d\mathbf{T}/d\varphi$ adalah sebuah vektor satuan dengan panjang satu,

Sedangkan,

$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{d\varphi}\right|\,\left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$, sebab $\left|\frac{d\mathbf{T}}{d\varphi}\right| = 1$

Rumus di atas mengukur tingkat perubahan φ terhadap s.

Teorema A

Misalkan sebuah kurva mempunyai persamaan vektor $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, dengan persamaan parametric $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, maka

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$$

Jika kurva tersebut mempunyai persamaan $y = g(x)$, maka

$$\kappa = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

KOMPONEN NORMAL DAN KOMPONEN SINGGUNG PADA PERCEPATAN

Misalkan P=P(t) sebuah titik pada sebuah kurva mulus.

Vektor normal satuan **N** = **N**(t) di titik P, didefinisikan sbb ;

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

maka

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

Karena $= |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = |\mathbf{v}|\ \mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\ \mathbf{T}$, maka

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Jadi

$$\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\kappa\mathbf{N}$$

Untuk menghitung $\mathbf{a}_\mathbf{N}$, kita harus menghitung κ, tetapi hal ini dapat dihindari dengan memperhatikan **T** dan **N** yang saling tegak lurus. Akibatnya diperoleh ;

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}_\mathbf{T}^2 + \mathbf{a}_\mathbf{N}^2$$