KOORDINAT KARTESIUS DALAM RUANG BERDIMENSI TIGA

Jarak Dua Buah Titik di R^3

Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dengan $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2)$, maka jarak dari P_1 ke P_2 adalah

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Contoh : Tentukan jarak antara titik (3,-1,5) dan (2,4,-3)

BOLA DAN PERSAMAANNYA

Bola adalah himpunan titik-titik di R^3 yang mempunyai jarak yang sama (jari-jari) terhadap sebuah titik tetap (pusat).

Jika (x, y, z) sebuah titik pada bola dan (h, k, l) titik pusatnya dengan jari-jari r, maka persamaan standar bola adalah

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

Atau dalam bentuk terurai dapa ditulis sbb

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Contoh : Tentukan pusat dan jari-jari sebuah bola dengan persamaan

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 14y - 8z + 1 = 0$$

RUMUS TITIK TENGAH

Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ Adalah titik-titik ujung dari sebuah garis, maka titik tengahnya adalah M(m_1, m_2, m_3) yang mempunyai koordinat ;

$$m_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad m_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad m_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Contoh : Tentukan persamaan bola dimana ruas garis yang menghubungkan (-2,3,6) dan (4,-1,5) merupakan diameternya.

PERSAMAAN BIDANG

Sebuah persamaan linear dalam $x, y,$ dan z, yaitu yang berbentuk $Ax + By + Cz = D$ dengan $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ merupakan sebuah bidang.

Contoh :

1. Sketsa grafik dari $2x + 6y + 3z = 12$
2. Sketsa grafik dari $x + y = 12$

VEKTOR DALAM RUANG BERDIMENSI TIGA

Vektor basis di R^3 adalah $\mathbf{i} = \langle 1,0,0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0,1,0\rangle$, dan $\mathbf{k} = \langle 0,0,1\rangle$,
maka vektor $\mathbf{u}$ dapat dinyatakan

$$\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

dan panjang $\mathbf{u}$ dinyatakan dengan

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

Penjumlahan, pengurangan dan perkalian vektor dengan scalar di R^3 sama seperti penjumlahan, pengurangan dan perkalian vektor dengan scalar di R^2. Begitu pula hukum-hukum aljabar yang diterapkan akan sesuai dengan kaidah yang telah dipelajari sebelumnya.

Hasil Kali Titik (dot product)

Jika $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Dan mempunyai interpretasi geometri sbb

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$$

Dengan θ sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$

Dua buah vektor akan saling tegak lurus jika dan hanya jika hasil kali titiknya nol.

Contoh :

1. Tentukan sudut antara $\langle 4, -3, -1\rangle$ dan $\langle -2, -3,5\rangle$
2. Perhatikan contoh 2 pasal 14.2

Sudut Arah dan Cosinus Arah

Sudut-sudut tak negative terkecil antara sebuah vektor tak nol **a** dengan vektor-vektor basis **i**, **j**, **k**, disebut sudut-sudut arah dari **a**, yang masing-masing dinyatakan dengan α, β, dan γ.

Jika $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, maka

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}||\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \cos\beta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}||\mathbf{j}|} = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \text{dan } \cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}||\mathbf{k}|} = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|},$$

Perhatikan bahwa

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

Dan vektor $\langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$ adalah vektor satuan dengan arah yang sama dengan vektor asal **a**.

Contoh : Tentukan sudut-sudut arah pada vektor $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Persamaan Bidang dengan Bahasa Vektor

Misalkan $\mathbf{n} = \langle A, B, C\rangle$ adalah sebuah vektor tak nol dan $P_1(x_1, y_1, z_1)$ adalah titik tetap. Himpunan titik-titik P(x, y, z) yang memenuhi $\overrightarrow{P_1P} \cdot \mathbf{n} = 0$ adalah suatu bidang yang melalui P_1 dan tegak lurus **n**.

Selanjutnya tuliskan $\overrightarrow{P_1P}$ dalam bentuk komponen $\overrightarrow{P_1P} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1\rangle$, maka $\overrightarrow{P_1P} \cdot \mathbf{n} = 0$ akan menghasilkan persamaan bidang standar sbb ;

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

dengan A, B, dan C tidak sekaligus nol.

Jika kita menyelesaikan persamaan di atas, maka akan diperoleh persamaan bidang dalam bentuk persamaan linear umum sbb ;

$Ax + By + Cz = D$ dengan $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

Contoh :

1. Perhatikan contoh 5 pasal 14.2
2. Tentukan persamaan bidang yang melalui P(1,2,-3) dan tegak lurus $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

Jarak Titik ke Bidang

Jika L adalah jarak dari titik (x_0, y_0, z_0) ke bidang $Ax + By + Cz = D$, maka

$$L = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Contoh :

Tentukan jarak bidang yang sejajar antara bidang $5x - 3y - 2z = 5$ dan $-5x + 3y + 2z = 7$.

HASIL KALI SILANG (CROSS PRODUCT)

Jika $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, maka hasil kali silang **u** dan **v** didefinisikan sbb;

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

Komponen vektor kiri **u** masuk ke baris kedua dan komponen vektor kanan **v** masuk ke baris ketiga. Hal ini tidak boleh tertukar, sebab

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$$

Contoh :

Jika $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, tentukan $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dan $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

Teorema A

Misalkan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor-vektor di R^3 dan θ sudut diantara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, maka

1. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, yaitu $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tegak lurus terhadap $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$
2. $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, dan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ membentuk system tangan kanan lipat-tiga
3. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \ sin\,\theta$

Teorema B

Dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di R^3 adalah sejajar jika dan hanya jika $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Contoh :

1. Perhatikan contoh 2,3 dan 4 pasal 14.3
2. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik (-1,-2,3) dan tegak lurus terhadap dua bidang $x - 3y + 2z = 7$ dan $2x - 2y - z = -3$

Teorema C

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor di R^3 dan *k* adalah scalar, maka ;

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ dan $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
6. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

Berdasarkan teorema C di atas diperoleh ;

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

Contoh :

Dengan menggunakan teorema C, tentukan $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, jika $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.