GARIS DAN KURVA DI R^3

Sebuah kurva ruang dapat ditentukan oleh tiga persamaan parametric

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t), \qquad t \in I$$

dengan f, g dan h kontinu pada selang I.

Dalam bahasa vektor, sebuah kurva dapat ditentukan dengan memberikan vektor posisi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathrm{t})$ dari sebuah titik $P = P(t)$, yaitu ;

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathrm{t}) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Garis

Sebuah garis ditentukan oleh sebuah titik tetap P_0 dan sebuah vektor tetap

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Sebuah garis adalah himpunan seluruh titik P sedemikian sehingga $\overrightarrow{P_0P}$ sejajar dengan $\mathbf{v}$, yaitu memenuhi

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$$

untuk bilangan real t.

jika $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ vektor posisi dari P dan $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ vektor posisi dari P_0, maka $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, sehingga persamaan garisnya adalah

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

Jika $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ dan $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ dan menyamakan komponen-komponen pada persamaan diatas, maka diperoleh persamaan parametrik sebuah garis yang melalui titik $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dan sejajar dengan vektor $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ sbb ;

$$x = x_0 + at, \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct$$

Contoh

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (1, -2, 3) dan (4, 5, 6)

Jika kita menyelesaikan setiap persamaan parametrik untuk t, dengan *a, b* dan *c* semuanya tidak nol, maka diperoleh persamaan simetrik sebuah garis yang melalui titik $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dan sejajar dengan vektor $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ sbb ;

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Contoh

Tentukan persamaan simetrik dari garis yang merupakan perpotongan antara bidang $4x + 3y - 7z = 1$ dan $10x + 6y - 5z = 10$

Garis Singgung terhadap Kurva

Misalkan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathrm{t}) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ adalah vektor posisi yang menentukan sebuah kurva di R^3, maka didefinisikan $\mathbf{r}'(\mathrm{t})$ sebagai berikut ;

$$\mathbf{r}'(\mathrm{t}) = \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

Selanjutnya $\mathbf{r}'(\mathrm{t})$ ada jika dan hanya jika $f'(t), g'(t),$ dan $h'(t)$ ada, dengan

$$\mathbf{r}'(\mathrm{t}) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

Contoh

Tentukan persamaan simetrik dari garis singgung terhadap kurva yang mempunyai persamaan $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = 2\cos \mathrm{t}\,\mathbf{i} + 6\sin t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ di titik $t = {}^{\pi}/_{3}$

Jarak Titik ke Garis di R^3

Misalkan P adalah sebuah titik pada sebuah garis yang mempunyai arah **n** dan Q adalah suatu titik di luar garis tersebut, maka jarak dari Q ke garis tersebut adalah ;

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{n}\right|}{|\mathbf{n}|}$$

Contoh

Tentukan jarak dari titik Q(1, 0, -4) ke garis $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$

Jarak Titik ke Bidang

Misalkan P adalah sebuah titik pada suatu bidang dengan normal **n** dan Q adalah suatu titik di luar bidang tersebut, maka jarak dari Q ke bidang tersebut adalah ;

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}\right|}{|\mathbf{n}|}$$

Contoh

Tentukan jarak dari titik Q(4, -2, 3) ke bidang $4x - 4y + 2z = 2$

Jarak Garis ke Garis

Misalkan P dan Q adalah dua titik pada garis-garis yang tidak berpotongan dengan arah masing-masing $\mathbf{n}_1$ dan $\mathbf{n}_2$ dan misalkan $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, maka jarak antara garis-garis ini adalah ;

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}\right|}{|\mathbf{n}|}$$

Contoh

Tentukan jarak antara garis $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ dan $\frac{x+4}{3}=\frac{y+5}{4}=\frac{z}{5}$