

KECEPATAN, PERCEPATAN, DAN KELENGKUNGAN DI \mathbb{R}^3

Misalkan $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$ adalah vektor posisi untuk titik $P = P(t)$ dan andaikan $\mathbf{r}'(t)$ ada dan kontinu dengan $\mathbf{r}'(t) \neq 0$. Panjang busur s dari $P(a)$ ke $P(t)$ dinyatakan dengan ;

$$s = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du = \int_a^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2 + [h'(u)]^2} du$$

Maka kecepatan, laju, dan percepatan didefinisikan sbb ;

Kecepatan : $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$

Laju : $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{v}(t)|$

Percepatan : $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$

Helik Melingkar

Misalkan P adalah suatu titik yang bergerak dengan vektor posisi

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$$

dengan a dan c konstanta positif.

Maka P menelusuri kurva yang mengelilingi silinder melingkar tegak dengan persamaan parametrik $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, dengan jejak spiral akan membesar sesuai dengan meningkatnya t pada persamaan $z = ct$.

Perhatikan contoh 1 dan 2 pasal 14.5

Kelengkungan

Vektor yang searah dengan garis singgung terhadap kurva di titik $P(t)$ adalah $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, sehingga **vektor singgung satuan** di $P(t)$ adalah ;

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$$

Jika s panjang busur maka tingkat perubahan arah dari garis singgung adalah $d\mathbf{T}/ds$ dan disebut **vektor kelengkungan** di P .

Berdasarkan aturan rantai,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$$

Jadi **kelengkungan** κ (kappa) adalah ;

$$\kappa = \kappa(t) = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Perhatikan contoh 4 pasal 14.5

Komponen Percepatan

Vektor normal satuan utama $\mathbf{N} = \mathbf{N}(t)$ di titik P, didefinisikan sbb ;

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

Seperti pada komponen percepatan di R^2 dengan $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ dan $2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$ maka diperoleh ;

$$\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \mathbf{N} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$$

dan hasil kali titik \mathbf{T} dengan \mathbf{a} diperoleh ;

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = a_T \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + a_N \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = a_T$$

atau

$$a_T = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|}$$

Sedangkan hasil kali silang \mathbf{T} dengan \mathbf{a} diperoleh ;

$$\mathbf{T} \times \mathbf{a} = a_T (\mathbf{T} \times \mathbf{T}) + a_N (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) = a_N (\mathbf{T} \times \mathbf{N})$$

sehingga

$$|\mathbf{T} \times \mathbf{a}| = a_N |\mathbf{T} \times \mathbf{N}| = a_N |\mathbf{T}| |\mathbf{N}| \sin \theta = a_N$$

atau

$$a_N = |\mathbf{T} \times \mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|}$$

Karena $a_N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa = |\mathbf{r}'|^2 \kappa$, maka diperoleh ;

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

Perhatikan contoh 5 pasal 14.5

Binormal di Titik P

Misalkan C sebuah kurva di R^3 dan \mathbf{T} vektor singgung satuan di titik P, maka **vektor normal utama** yang tegak lurus terhadap \mathbf{T} adalah ;

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|}$$

Sedangkan vektor yang tegak lurus baik terhadap \mathbf{T} maupun \mathbf{N} disebut **binormal**, dengan $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$

Jika vektor singgung satuan \mathbf{T} , vektor normal utama \mathbf{N} , dan vektor binormal \mathbf{B} , mempunyai titik awal di P , maka vektor tersebut membentuk lipat tiga dan bersistem tangan kanan yang dikenal dengan istilah **trihedral**. Sedangkan bidang \mathbf{T} dan \mathbf{N} disebut **bidang oskulasi** di P .

Contoh

Dari contoh 5 pasal 14.5, tentukan persamaan bidang oskulasi di titik $P(1, 1, \frac{1}{3})$