TEOREMA GREEN PADA BIDANG

Teorema A

Misalkan C suatu kurva tertutup sederhana dan mulus sepotong-sepotong yang membentuk batas dari sebuah daerah S pada bidang xy. Jika M(x,y) dan N(x,y) kontinu dan mempunyai turunan parsial kontinu di S dan batas C-nya, maka :

$$\iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint_C M\,dx + N\,dy$$

Contoh 1

Misalkan C adalah batas suatu segitiga dengan titik-titik sudut (0,0), (1,2) dan (0,2). Hitunglah

$$\oint_C 4x^2y\,dx + 2y\,dy$$

- Dengan metode langsung
- Dengan teorema Green

Contoh 2

Gunakan teorema Green untuk menghitung integral garis

$$\oint_C (x^3 + 2y)dx + (4x - 3y^2)\, dy$$

Dengan C adalah elips :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Contoh 3

Gunakan teorema Green untuk menghitung integral garis

$$\oint_C 2xy\,dx + y^2\,dy$$

Dengan C adalah kurva tertutup yang dibentuk oleh $y = x/2$ dan $y = \sqrt{x}$ antara (0,0) dan (4,2).

Bentuk Vektor dari Teorema Green

Andaikan C adalah kurva tertutup sederhana dan mulus pada bidang xy dan orientasinya berlawanan dengan arah jarum jam dalam arti parameterisasi panjang busurnya $x = x(s)$ dan $y = y(s)$, maka

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}$$

adalah vektor singgung satuan dan

$$\mathbf{n} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}$$

adalah vektor normal satuan yang mengarah ke luar dari daerah S yang dibatasi oleh C.

Jelas bahwa, **T . n** = 0 sebab,

$$\left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right).\left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i}-\frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right)=\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds}=0$$

Jika **F**(x, y) = M(x, y)**i** + N(x, y)**j** adalah medan vektor, maka

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds=\oint_C (M\mathbf{i}+N\mathbf{j}).\left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i}-\frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right)ds=\oint_C (-N\,dx+M\,dy)=\iint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dA$$

Dilain pihak,

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\nabla.\mathbf{F}=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}$$

Jadi diperoleh,

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds=\iint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dA=\iint_S \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA=\iint_S \nabla.\mathbf{F}\,dA$$

yang biasa disebut **Teorema Divergensi Gauss** pada suatu bidang.

Jumlah fluida yang meninggalkan S per satuan waktu disebut **fluks** dari medan vektor **F** yang menyeberangi kurva C ke arah luar, dan

$$\text{fluks } \mathbf{F} \text{ yang menyeberangi C} = \oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds$$

Masih ada bentuk vektor lain untuk Teorema Green, tetapi dalam ruang berdimensi tiga. Misalkan **F** = M **i** + N **j** + 0 **k**, dan **T** adalah vektor singgung satuan *d***r**/*ds*, maka

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{T}\,ds = \oint_C \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Dilain pihak,

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Sehingga diperoleh :

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F}).\,\mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

Jadi

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}).\,\mathbf{k}\,dA$$

yang disebut **Teorema Stokes** pada bidang

Contoh 4

Diketahui medan vektor $\mathbf{F} = M\,\mathbf{i} + N\,\mathbf{j} = -\frac{1}{2}y\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\,x\,\mathbf{j}$ dan C sebarang kurva tertutup pada bidang xy. Hitunglah

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds \quad \text{dan} \quad \oint_C \mathbf{F}.\mathbf{T}\,ds$$

Contoh 5

Jika $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ dan C batas bujursangkar satuan dengan vertex-verteks (0,0), (1,0), (1,1), dan (0,1). Hitunglah

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds \quad \text{dan} \quad \oint_C \mathbf{F}.\mathbf{T}\, ds$$