

### 1.3 Perkalian Titik (*Dot Product*)

#### *Definisi 1.6 Perkalian titik*

Misalkan  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  dan  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  adalah vektor di  $\mathbf{R}^3$ . Perkalian titik dari  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$ , dinotasikan  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  adalah

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

jika di  $\mathbf{R}^2$  adalah

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Contoh 1

$$(2, -1, 3) \cdot (1, 3, 5) = 2 - 3 + 15 = 14$$

$$(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (7\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9\mathbf{k}) = 7 + 3 - 9 = 1$$

#### **Sifat-sifat Perkalian titik**

Jika  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , dan  $\mathbf{c}$  adalah sembarang vektor di  $\mathbf{R}^3$  (atau  $\mathbf{R}^2$ ) dan  $k \in \mathbf{R}$  adalah skalar, maka

1.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$  dan  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$  jika dan hanya jika  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$
2.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3.  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4.  $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$

#### *Definisi 1.7 Panjang Vektor*

Jika  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , maka panjang vector  $\mathbf{a}$  ditulis  $\|\mathbf{a}\|$ , yaitu

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Soal 1

Buktikan  $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$

### **Teorema 1.8**

Jika **a** dan **b** dua vector di  $\mathbf{R}^2$  atau  $\mathbf{R}^3$ , maka  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ .

Bukti Apabila **a** vector nol, maka  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  dan  $\|\mathbf{a}\| = 0$ , terbukti

Misalkan  $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$  maka berdasarkan aturan kosinus (lihat gambar)

$$\|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

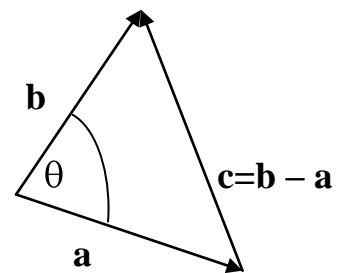
$$\text{Jadi, } 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{c}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (2)$$

Berdasarkan (1) dan (2), diperoleh

$$\begin{aligned} 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \\ &= 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$



### **Sudut antara Dua Vektor**

Pada teorema 1.3,  $\theta$  adalah sudut antara vector **a** dan **b**. Sehingga untuk vector **a** dan **b** yang tidak nol, maka sudut antara vector **a** dan **b** adalah ( $0 \leq \theta \leq \pi$ )

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

Soal 2

Cari sudut antara kedua vector berikut:

- $\mathbf{a} = \sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$  dan  $\mathbf{b} = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$
- $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$  dan  $\mathbf{b} = (3, -6, -5)$

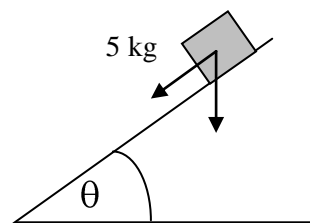
### Proposisi 1.9

Misalkan  $k$  skalar dan  $\mathbf{a}$  adalah sembarang vector, maka

1.  $\|k\mathbf{a}\| = k\|\mathbf{a}\|$
2. Vektor satuan (vector yang panjangnya satu) pada arah vector  $\mathbf{a}$  adalah  $\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$

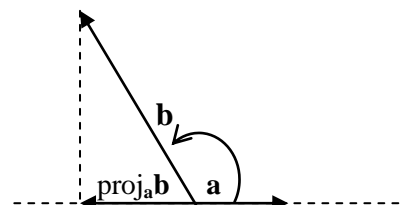
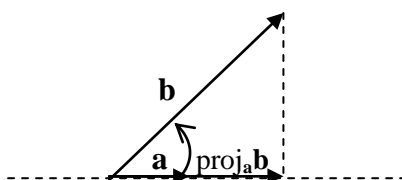
### Proyeksi Vektor

Bagaimana menyatakan vector gaya yang bekerja pada benda di bidang miring seperti tampak pada gambar?



Untuk menjawab pertanyaan di atas perlu mencari proyeksi vector pada vector yang lain. Misalkan diberikan dua vector  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$  (lihat gambar), maka **proyeksi  $\mathbf{b}$  pada  $\mathbf{a}$** , ditulis  $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$  adalah

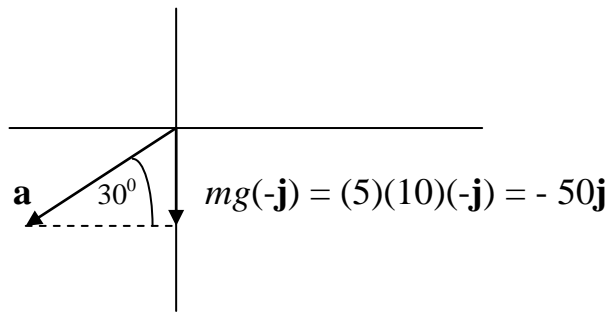
$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|^2} \cdot \mathbf{a}$$



$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}\| = \|\mathbf{b}\| \cos \theta = \frac{\|\mathbf{b}\| \|\mathbf{a}\| \cos \theta}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|}$$

Berdasarkan proposisi 1.2 nomor 2, diperoleh

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$$

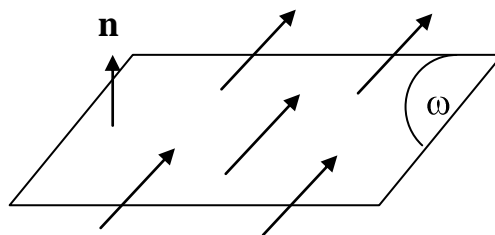


$$\mathbf{a} = -\cos 30^\circ \mathbf{i} - \sin 30^\circ \mathbf{j} = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{j}$$

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{F} = \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \right) \mathbf{a} = \frac{0 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-50)}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right) = 25 \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$$

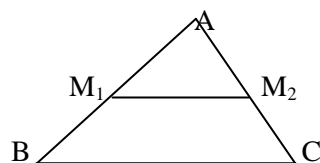
### Soal 3

Nyatakan vector proyeksi kecepatan fluida  $\mathbf{v}$  yang melalui bidang datar  $\omega$  terhadap vector normal  $\mathbf{n}$  !



### Soal 4

Untuk setiap segitiga ABC, dan  $M_1$  titik tengah AB dan  $M_2$  titik tengah AC. Tunjukkan bahwa garis  $M_1M_2$  sejajar garis BC.



### Soal 5

Tunjukkan bahwa diagonal jajaran genjang mempunyai panjang yang sama

### Soal 6

Hitung  $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$

a.  $\mathbf{a} = (1, 2)$  dan  $\mathbf{b} = (-3, 4)$

b.  $\mathbf{a} = (-1, 3, 7)$  dan  $\mathbf{b} = (4, 2, -1)$

c.  $\mathbf{a}$  vektor satuan yang searah dengan vector  $\mathbf{b} = (2, -1, 1)$